MISCELLANEA BEROLINENSIA

AD

INCREMENTUM SCIENTIARUM EX SCRIPTIS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM

EXHIBITIS

EDITA

CONTINUATIO VI. SIVE

TOMUS VII.

CUM FIGURIS AENAEIS ET INDICE CONTENTORUM.

BEROLINI
TYP. JOH. GOTHOFR. MICHAELIS
M DCC XLIII.

Ex Biblioth.
Universitatis
Frider. Guil.
Berolin.

INDEX

Diſſertationum, quas hic Tomus complectitur.

IN CLASSE MATHEMATICA.

I. EULERI Determinatio orbitæ cometæ anno 1742. obſervati. - pag. 1

II. Ejusdem theoremata circa reductionem formularum integralium ad circuli quadraturam. - p. 91

III. Ejusd. De inventione integralium, ſi poſt integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur. - - p. 129

IV. Ejusd. De ſummis ſerierum reciprocarum ex poteſtatibus numerorum naturalium ortarum diſſertatio altera. - - - p. 172

V. Ejusd. De integratione æquationum differentialium altiorum graduum. - - - p. 193

VI. Naudæi conſpectus Trigonoſcopici continuatio cum adjectis curioſis quibusdam problematis algebraicis. - - p. 242

VII. Clairaut methodus generalis inveniendi catenarias. - - p. 270

IN CLASSE PHYSICA.

I. POTT methodus deſtillandi & dephlegmandi ope caloris ſolaris. p. 275

II. Ejusdem conſiderationes circa indolem baſis ſalis communis. - p. 285

III. Ejusdem monita de cauſa rubedinis vaporum acidi nitroſi. - p. 296

IV. Ejusdem: vitrioli albi analyſis juſtior quam Lemeriana. - p. 306

V. Ejusdem excerpta ex literis Cnoll, alcali nativum indicum & boracem concernentia. - p. 318

VI. MARGGRAF methodi novæ phosphorum ſolidum tam ex urina ſalius conficiendi, quam etiam eundèm promtiſſime & puriſſime ex phlogiſto & ſingulari quodam ex urina ſeparato ſale componendi. p. 324

VII. KRUGER de novo muſices, quo

oculi delectantur, genere. - p. 345

VIII. FRISCH de nido Chlorionis ſive turdi lutei. - - p. 358

IX. N. N. De cauſa gravitatis. - p. 360

IN CLASSE LITERARIA.

I. Jablonski coniectura in clauſulam tabulæ Bembinæ vel Iſiacæ, de feſto Oſiridis inventi, deque die in anno Ægyptiorum feſto huic proprio. - - - p. 373

II. Ejusd. Diſſertatio de diebus ægyptiacis in vetuſto Calendario Romano commemoratis. - p. 406

III. Haarenberg Exercitatio, ad geographiam referenda, de regione & vrbe Hemath. - - p. 443

Num. I.

Determinatio Orbitæ Cometæ qui menſe Martio hujus anni 1742. potiſſimum fuit obſervatus.

A u c t o r e

L. Euler.

§. I.

Quanquam plures habentur methodi paſſim traditæ ex aliquot Cometæ obſervationibus ejus orbitam determinandi, tamen non dubito, quin plerique, qui hoc tempore in Theoriam Cometæ nuper obſervati inquiſiverint, methodum cum faciliorem tum etiam certiorem deſideraverint, quam ſequerentur. Quantum enim mihi quidem conſtat, complures eximii Aſtronomi vel fruſtra in hoc negotio operam collocaverunt, vel computi moleſtiis de- *Tab. I.*

terri-

territi nequidem elaboraverunt: ac de me quidem ipſe diſſimulare non poſſum, me non parum temporis tam proprio ſtudio, quam amicorum adhortationibus permotum in hac inveſtigatione conſumſiſſe, neque tamen per methodos cognitas quicquam impetrare potuiſſe, in quo acquieſcerem. Videtur autem iſte cometa præ reliquis, qui calculo adhuc ſunt ſubjecti tot tantisque anomaliis implicatus, ut ejus motus verus, qualis ex ſole conſpici debuiſſet, ne minimum quidem conſentiret cum eo, quem hic ex terra ſpectavimus. Quare cum orbita cometæ ex ejus locis heliocentricis determinari debeat, tantum diſcrimen, quod inter loca heliocentrica & obſervata intercedit, maxime impedit, quo minus ad ipſius motus veri cognitionem pervenire queamus. Poſtquam enim obſervationes cum Theoria Newtoni contuliſſem, facile perſpexi motum cometæ, qui ex terra directus ſecundum ſignorum ſeriem & celerrimus fuit viſus, revera contra ſignorum ordinem retrogradum adeoque tardum fuiſſe, ut ejus celeritas non multum ſuperaret eam, qua terra in orbita ſua progreditur. Hinc autem ſumma naſcitur difficultas ex locis geocentricis ejus loca vera heliocentrica colligendi, quæ propterea etiam plurimum augetur, quod minimus error in aſſignatione locorum heliocentricorum commiſſus, maximam aberrationem in orbitæ determinatione producat. Quamobrem etiamſi ejus parallaxis obſervari potuiſſet, tamen niſi eſſet exactiſſima atque ad minuta ſecunda abſoluta, vix inde ullum ſubſidium ad orbitæ determinationem redundaret.

§. II.

Summus conſenſus motuum cœleſtium cum Theoria Neutoniana, qui continuo magis magisque elucet, omnino dubitare

tare nos non ſinit, quin cometæ cuncti pariter ac planetæ, quantumvis etiam ipſorum motus obſervati adverſari videantur, in ſectionibus conicis, in quarum alterutro ſoco Sol verſetur, moveantur atque æqualibus temporibus æquales areas circum ſolem conficiant. Quodſi autem motus cometæ cum motu terræ aliusve planetæ primarii circa ſolem gyrantis comparetur, erunt tempora, quibus cometa & planeta data in orbitis ſuis ſpatia abſolvunt, in rationc compoſita ex ratione arearum circa ſolem deſcriptarum directa, ac ratione laterum rectorum ſeu parametrorum reciproca ſubduplicata. Dubium itaque eſt nullum, quin cometæ hac lege in ſectionibus conicis circa ſolem revolvantur: ipſorum vero motus tantopere inæquabilis, quo modo ad ſolem ſatis prope accedunt, modo longiſſime ab eo recedunt, maniſeſto indicat corum orbitas eſſe neque circulares, neque ellipſes orbium planetarum ſimilcs. Erunt itaque vel ellipſes maxime oblongæ, vel parabolæ vel adeo hyperbolæ; priori autem caſu ob orbitam in ſe redeuntem tandem redire, ſtatisque temporibus reverti deberent, reliquis vero caſibus nulla reverſio foret expectanda, niſi ſortc ipſorum curſus a ſtellis fixis ita immutaretur, ut ſemita ſolem verſus inflecteretur. Cum autem non ſolum veriſimile ſit cometas ſtata reverſionis tempora habere, ſed etiam ellipſis maxime oblonga a parabola ſenſibiliter non diſcrepet, a veritate non ſenſibiliter aberrabimus, ſi ellipſin maxime excentricam pro orbita cometæ aſſumamus; vel cum ejusmodi ellipſis cum parabola facile confundatur, ſatis tuto orbitæ cometarum inter parabolas quæri ſolent. Tam brevi enim temporis ſpatio, quo cometæ apparent, ſive in ellipſibus maxime

oblon-

oblongis, ſive in parabolis, ſive in hyperbolis non nimis divergentibus moveantur, motus fere idem deprehendatur neceſſe eſt. Interim tamen ſi motus cometæ deinceps a parabola aliquantum deflectere obſervetur, ex hac ipſa deflexione vera orbita cometæ, utrum ellipſis ſit an hyperbola, concludi poterit; ſicque ex hypotheſi licet falſa aſſumta, tamen veritas elicietur.

§. III.

Si igitur aſſumamus orbitam cometæ eſſe parabolam, in cujus foco ſol exiſtat, quinque res occurrunt determinandæ, ut locum cometæ geocentricum ad quodvis tempus aſſignare queamus. Primo enim ſi ipſam cometæ orbitam in ſe conſideremus, ejus verticem ſeu perihelium, ejusque a Sole diſtantiam noſſe oportet; quo pacto magnitudo parabolæ definitur; hincque tempus, quo cometa datum ſpatium percurrit, definiri poterit. Secundo tempus cognitum eſſe debet, quo cometa in ipſo perihelio eſt verſatus, ut hinc locus cometæ in orbita ſua ad datum tempus colligi queat. Deinde ad locum cometæ reſpectu eclipticæ exprimendum, poſitio orbitæ reſpectu eclipticæ eſt quærenda: tertio igitur locus, ubi orbita cometæ planum eclipticæ interſecat, notus eſt debet, quæ interſectio eſt linea recta per ſolem tranſiens, ac linea nodorum appellatur; duo ſcilicet orbita cometæ habet puncta in ipſo plano eclipticæ ſita ſibi ediametro oppoſita, quorum alterum, ex quo cometa in hemisphærium boreale ascendit, nodus ascendens, alterum vero, ubi cometa in regionem auſtralem demergitur, nodus descendens vocatur: requiritur idcirco locus ulterutrius nodi, qui per longitudinem ſeu diſtantiam a puncto æquinoctali verno indicatur. Quarto diſtantia nodi a perihelio, ſeu angulus quem

axis

axis orbitæ cum linea nodorum facit, inveſtigari debet; ut ſi locus cometæ a perihelio conſtet, ſimul ejus diſtantia a nodo aſſignari poſſit. Quinto denique inclinatio orbitæ cometæ ad eclipticam eſt definienda, quæ menſuratur angulo, quem hæc duo plana orbitæ cometæ & eclipticæ inter ſe conſtituunt. His igitur quinque rebus cognitis ad datum tempus locus cometæ reſpectu eclipticæ, hoc eſt ejus longitudo & latitudo poterit inveniri, ſimulque ejus vera a Sole diſtantia; ex quibus porro, ſi locus terræ in ecliptica ad hoc idem tempus computetur, ejus locus geocentricus, hoc eſt longitudo ac latitudo geocentrica reperiri poterit. Has vero easdem quinque res cognitas eſſe oportet, ſi orbita cometæ non aſſumatur parabola, ſed alia ſectio conica puta ellipſis vel hyperbola ſpecie data; hoc eſt in qua ratio inter diſtantiam perihelii a Sole & latus rectum cognita aſſumitur, ſin autem hæc ratio eſſet incognita, ſextam conditionem quinque memoratis addendam conſtitueret.

§. IV.

Sive igitur aſſumamus pro orbita cometæ parabolam ſive aliam ſectionem conicam ſpecie datam, quinque habemus res ſeu quantitates incognitas, quas ſi problema de orbitæ cometæ inventione reſolvere velimus, determinari oportet. Prima ſcilicet incognita eſt diſtantia perihelii a ſole; ſecundo quæri debet tempus, quo cometa per perihelium tranſierit; tertio longitudo nodi ſive ascendentis ſive descendentis; quarto diſtantia heliocentrica nodorum a perihelio; & quinto inclinatio orbitæ ad eclipticam. Sin autem pro orbita cometæ aſſumeretur ſectio conica in genere, tum ad has quinque incognitas accederet ſexta, ratio ſcilicet lateris recti ad diſtantiam perihelii a ſole.

Quodſi ergo hoc problema more in analyſi maxime conſueto reſolvere velimus, loco harum incognitarum totidem litteræ in calculum induci, ex iisque aliquot cometæ loca geocentrica ſupputari deberent, quæ tum locis obſervatis æqualia poſita æquationes ſuppeditarent, ex quibus incognitas erui liceret. Sic ex una quaque obſervatione obtinerentur binæ æquationes, altera ex longitudine altera ex latitudine, & hanc obrem tres obſervationes ad ſex incognitas determinandas ſufficere videantur; quoniam vero orbita cometæ eſt plana, duæ latitudines jam per ſe reliquas latitudines determinant: ita ut quotcunque obſervationes cum calculo comparentur, duas tantum latitudines conſideraſſe ſufficiat. Hancobrem ex tribus obſervationibus quinque ſolum incognitæ, ideoque orbita cometæ, ſi jam ſpecie fuerit data, determinari poterunt; ac, ſi ipſa ſpecies fuerit incognita, quatuor obſervationibus ad negotium abſolvendum erit opus. At vero hæc via problema reſolvendi, quæ primo intuitu ſe offert, tantis involuta eſt difficultatibus, ut per eam nunquam optatum ſcopum attingere poſſemus, tam propter ingentem incognitarum numerum, quam ob ſummam earum permixtionem mutuam, quæ ſucceſſivam incognitarum eliminationem, ſingularumque determinationem non ſolum difficillimam ſed etiam viribus humani ingenii inſuperabilem redderet. Quam obrem hac directa ſolvendi via relicta alii alias excogitaverunt methodos indirectas, per quas incognitarum numerum diminuerent, & quæſtionem vero tantum proxime reſolverent; interim tamen vel ſumma difficultas cum calculo manſit conjuncta, vel aberratio a veritate nimis magna deprehenditur. Quocirca niſi nimium errare velimus, rigorem

geome-

geometricum, quantum fieri poterit, retinere oportebit, neque veram theoriam per hypotheſes fictas contaminari conveniet, quibus calculus quidem ſublevetur, veritati autem vis inferatur.

§. V.

Poſt plura autem in ſolutione hujus problematis inſtituta tentamina, inveſtigationem ita adornari debere intellexi, ut plus una incognita in calculum non ingrediatur; per incognitarum enim multitudinem ſolutionem maxime impediri animadverti. Quanquam autem hoc ipſum initio factu difficillimum videbatur, propterea quod quinque illæ incognitæ prorſus a ſe invicem non pendeant, tamen re diligentius perpenſa, atque tribus obſervationibus conjunctim in ſubſidium vocatis, inveni tandem methodum certam arbitrariis fictionibus non inquinatam cujus ope unica incognita aſſumta, omnia quæ ad perfectam orbitæ Cometæ cognitionem pertineant determinare, atque tandem hanc ipſam incognitam non adeo difficulter definire poſſem. Via quidem conſueta non licebat negotium ad reſolutionem æquationis cujusdam, qua valor incognitæ indicaretur, perducere; verum cum unica habeatur incognita, expedire viſum eſt, ex pluribus valoribus pro ea aſſumtis, eum qui veritati eſſet conſentaneus, concludere: ſimili ſcilicet ratiocinio in hac inquiſitione uti convenit, quo in regula *Falſi* dicta per aliquot poſitiones falſas vera ſolutio erui ſolet. Hoc autem pacto prorſus evitamus litteras incognitas, quibus calculus maxime perturbaretur. Neque vero hoc compendium in uſum vocari poſſet, ſi plures una incognita determinari deberent, cum ſubſtitutio valorum arbitrariorum pro ſingulis incognitis,

gnitis, niſi eſſet fere infinita, unquam ad cognitionem unius. cujusque perduceret. Hanc igitur ſolvendi methodum ſecutus primum parabolam determinabo, in qua cometæ motus cum tribus obſervationibus conſentiat; tum vero etiam ellipſin ſatis oblongam ſed ſpecie datam ſum definiturus, quæ pariter tribus illis obſervationibus ſatisfaciat: utroque enim caſu ex tribus obſervationibus orbita cometæ poterit aſſignari. His factis præter tres has obſervationes quartam maxime remotam contemplabor, inquiſiturus, utrum parabola an ellipſis aſſumta ad illam propius accedat: nimirum tam ex parabola quam ellipſi ad tempus quartæ obſervationis cometæ longitudinem ac latitudinem geocentricam computabo, & cum loco obſervato comparabo. Quodſi enim alteruter locus conſentiat, indicio id erit orbitam cometæ revera congruere cum ea, quæ hanc conſenſum produxerit: ſin autem neuter locus computatus cum obſervato conſpiret, ex ipſo diſſenſu vera orbitæ ſpecies, utrum ſit magis minusve oblonga quam aſſumta, colligi poterit; ſicque ſi orbita cometæ reperiatur ellipſis, ejus tempus periodicum ſatis prope innoteſcet.

§. VI.

Antequam autem inveſtigationem orbitæ cometæ ſuſcipiam, neceſſe erit motum cometæ cum in orbita parabolica, tum in ellipſi admodum oblonga ſpecie data attentius perpendere, atque ad calculum revocare. Sit igitur primum orbita cometæ PML parabola, in cujus foco S poſitus ſit Sol: ſitque P vertex parabolæ ſeu perihelium & diſtantia perihelii a ſole PS ponatur $= a$; erit ſi ex S ad axem PS normalis SL ducatur, applicata SL æqualis ſemiſſi lateris recti, ideoque SL $= 2a$. Conſideretur

Fig. I.

retur jam cometæ locus quicunque M; hinc ad focum ducatur recta MS, itemque ad SP normalis MK. Ponatur angulus PSM $= v$, qui eſt cometæ anomalia vera, ejusque diſtantia a ſole ſeu recta MS $= y$. Nunc ex natura parabolæ eſt SM $=$ PS $+$ PK $= 2$ PS $-$ KS: unde fit KS $= 2$ PS $-$ SM $= 2a - y$. At poſito ſinu toto $= 1$, erit coſ. PSM $=$ coſ. $v. = \frac{KS}{SM} = \frac{2a-y}{y}$; ideoque $y = \frac{2a}{1 + cos. v.}$ Cum autem ſit coſ. $\frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + cos. v.}{2}}$; erit $y = \frac{a}{(cos. \frac{1}{2} v^2)}$ ideoque coſ. $\frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{a}{y}}$. Ponatur tang. $\frac{1}{2} v = t$; erit $dv = \frac{2dt}{1+tt}$; & coſ. $\frac{1}{2} v = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$ hincque fit $y = a(1+tt)$; ſicque ex anomalia vera v diſtantia cometæ a ſole, & viciſſim ex hac diſtantia anomalia vera v invenitur. Ad motum autem cometæ cognoſcendum præcipue ſpectari debet area PSM, cujus elementum, ducto radio proximo Sm, eſt ſector infinite parvus MSm. Hujus area ob angulum MSm $= dv$ erit $= \frac{1}{2} yydv = aadt(1+tt)$; quare integrando habebitur area PSM $= aa(t + \frac{1}{3} t^3)$; cui tempus, quo cometa ſpatium PM in orbita ſua abſolvit, eſt proportionale. Vel cum ſit $t = \sqrt{\frac{y-a}{a}}$, erit ſubſtituto hoc valore area PSM $= \frac{1}{3} a (y + 2a) \sqrt{\frac{y-a}{a}}$.

§. VII.

Comparemus jam motum cometæ cum motu terræ, ut tempus, quo cometa datam aream conficit, in diebus menſurisque conſuetis exprimere poſſimus. Sit ſemiaxis transverſus ſeu diſtantia terræ a ſole media $= c$, ejusque latus rectum $=$ e; erit axis conjugatus $\sqrt{2ce}$; & area totius orbitæ telluris $= \frac{1}{2} \pi c \sqrt{2ce}$, denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam circuli;

culi; hanc autem aream totam terra circa ſolem abſolvit ſpatio anni ſiderei, ſeu 365 diebus 6 horis & 9 minutis, ſeu horis ac minutis ad partes diei decimales reductis tempore 365, 25625 dierum. Abſolvat autem cometa ſpatium ſeu aream PSM $= aa(t + \frac{1}{3}t^3)$ tempore n dierum, quoniam tempora ſunt ut areæ directe, & radices quadratæ ex lateribus rectis reciproce, habebitur hæc proportio:

$$365,25625 : n = \frac{\pi c \sqrt{2c}}{2} : \frac{a\sqrt{a}}{2}(t + \tfrac{1}{3}t^3):$$

quoniam orbitæ terræ latus rectum eſt $= c$, & orbitæ cometæ $= 4a$. Hinc ergo reperitur tempus, quo cometa ab P ad M progreditur $= n = \frac{365,25625 \cdot a\sqrt{a}}{\pi c \sqrt{2c}}(t + \frac{1}{3}t^3)$ dierum. Ponamus uti in tabulis aſtronomicis fieri ſolet, diſtantiam terræ a ſole mediam $c = 100000$; & quia eſt $\pi = 3,14159265$ coefficiens numericus ſequenti modo per logarithmos determinabitur.

l c	$= 5,0000000$
l 2	$= 0,3010300$
l $2c$	$= 5,3010300$
Ergo l $\sqrt{2c}$	$= 2,6505150$
add. l c	$= 5,0000000$
add. l π	$= 0,4971499$
	$8,1476649$
ſubtr. l 365, 25625	$= 2,5625976$
l denomin.	$= 5,5850673$
& ipſe denomin.	$= 384651,5$

Hanc obrem tempus, quo cometa anomaliam veram PSM $= v$, abſolvit erit $= \frac{a\sqrt{a}}{384651,5}(t + \frac{1}{3}t^3)$ dierum; ubi ad calculum expediendum notaſſe convenit numeri 384651,5 logarithmum

eſſe

eſſe $= 5,5850673$. Vel ob $t = \sqrt{\frac{y-a}{a}}$ erit idem tempus $= \frac{(y+2a)\sqrt{(y-a)}}{1153954,5}$ dierum; eſtque denominatoris 1153954,5 logarithmus $= 6,0621886$

§. VIII.

Quodſi jam diſtantia perihelii a Sole PS $= a$ fuerit cognita, ſimulque tempus, quo cometa in perihelio eſt verſatus, ſit datum, ad datum quodvis tempus vel ante vel poſt cometæ appulſum ad perihelium, ejus locus in orbita ſua poterit computari. Sit enim temporis intervallum inter momentum, quo cometa in perihelio exiſtit, & momentum temporis propoſitum $= n$ dierum, horis ſcilicet & minutis in partes diei decimales converſis; & habebitur iſta æquatio $n = \frac{a\sqrt{a}}{384651,5}(t + \frac{1}{3}t^3)$; quia autem $a\sqrt{a}$ in numeris datur, ponatur numerus $\frac{a\sqrt{a}}{384651,5} = N$. eritque $n = N(t + \frac{1}{3}t^3)$ ſeu $\frac{n}{N} = t + \frac{1}{3}t^3$. Pendet ergo inventio anomaliæ veræ ſeu anguli PSM propoſito tempori reſpondentis, cujus ſemiſſis tangens eſt $= t$, a reſolutione æquationis cubicæ $(t + \frac{1}{3}t^3) = \frac{n}{N}$. Quod cum opus eſſet vehementer moleſtum, pro ſingulis gradibus anomaliæ veræ v ſupputavi valores reſpondentes expreſſionis $(t + \frac{1}{3}t^3)$, poſito ſinu toto perpetuo $= 1$. Hos valores $(t + \frac{1}{3}t^3)$ ſingulis gradibus anomaliæ veræ v reſpondentes tabula annexa continet; cujus igitur uſus erit expeditus: quæratur enim numerus $\frac{n}{N}$ in hac tabula ſub titulo areæ parabolicæ ſeu formulæ $(t + \frac{1}{3}t^3)$ qui ſi ipſe reperiatur, anomalia vera reſpondens dabit angulum

PSM quæſitum, ſin autem numerus $\frac{n}{N}$ non exacte in hac columna reperiatur, inter proximos per interpolationem conſuetam anomalia vera reſpondens ad minuta & ſecunda concludetur; quem in finem differentias addidi. Cum autem plerumque ad logarithmum numeri $\frac{n}{N}$ perveniatur, tres feci columnas, quarum tertia logarithmos formulæ $t + \frac{1}{3}t^3$ exhibet, quo ex iis pari opera anomalia vera quæſita inveniri queat. Characteriſticam autem horum omnium logarithmorum denario auxi, ne numerorum unitate minorum logarithmi fierent negativi, quamobcauſam horum logarithmorum pariter ac logarithmorum ſinuum & tangentium characteriſticæ, in uſu denario ſunt minuendi: eo quod in tabulis logarithmus ſinus totius, cujus quippe unitatis logarithmus eſt = 0, ponitur = 10, 0000000.

§. IX.

His pro parabola expeditis ponamus nunc orbitam, in qua cometa moveatur, eſſe ſectionem conicam quamcunque PML in cujus foco S poſitus ſit ſol, ac ponatur ut ante diſtantia perihelii a ſole PS = a. Ducatur ad axem ex foco S normalis SL, quæ erit ſemiſſis lateris recti, quæ cum non amplius, uti in parabola ſit = $2a$, ponatur ea SL = b; ubi notandum eſt, ſi fuerit $b < 2a$ curvam fore ellipſin, ſin autem ſit $b > 2a$ eam fore hyperbolam, in applicatione autem ad cometas hæc recta b non multum a valore $2a$ diſcrepabit. Ex his erit orbitæ axis transverſus = $\frac{2aa}{2a-b}$; qui pro parabola ſi $b = 2a$, fit infinitus, pro ellipſi, ſi $b < 2a$ finitus & affirmativus, ſin autem $b > 2a$, pro hyperbola axis transverſus fit finitus quidem, at negativus. Verſetur jam cometa in loco M, ita ut ducta recta MS, ſit angulus

PSM

PSM ejus anomalia vera, ponatur recta MS $= y$, & angulus PSM $= v$. Ducta autem ex M ad axem PS perpendiculari MK, erit ex natura ſectionum conicarum MS $= y = a + \frac{(b-a)}{a}$. PK $= b - \frac{(b-a)}{a}$. KS; ideoque KS $= \frac{a(b-y)}{b-a}$. Cum autem $\frac{KS}{y} = \frac{KS}{SM}$ det coſinum anguli PSM $= v$, erit coſ. $v = \frac{a(b-y)}{y(b-a)}$ ideoque $y = \frac{ab}{a+(b-a)\,coſ.\,v}$. Ponatur iterum tang. $\frac{1}{2}v = t$, ut ſit $dv = \frac{2dt}{1+tt}$ & coſ. $\frac{1}{2}v = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$ atque coſ. $v = \frac{1-tt}{1+tt}$; erit $y = \frac{ab(1+tt)}{b+(2a-b)tt}$. Quoniam vero hic ponimus orbitam quam minime a parabola discrepare, & eſſe ellipſin vehementer oblongam, ſit $b = 2a - \alpha a$; erit ellipſis axis transverſus $= \frac{2a}{\alpha}$; & cum ſit α numerus valde exiguus fiet $y = \frac{a(1+tt)\ (2-\alpha)}{2-\alpha(1-tt)} = a(1+tt)\ \frac{\alpha tt}{2}(1+tt) - \frac{\alpha\alpha tt}{4}(1-t^4)$ q. pr. ſeu $y = a(1+tt)\left(1 - \frac{\alpha tt}{2} - \frac{\alpha\alpha tt(1-tt)}{4}\right)$. Cognita autem anomalia vera v, diſtantia cometæ a ſole commodius invenitur per æquationem $y = \frac{a(2-\alpha)}{1+(1-\alpha)\,coſ\,v}$, & viciſſim ſi diſtantia cometæ a ſole y fuerit data, erit coſ. $v = \frac{2a-y-\alpha a}{(1-\alpha)y}$.

§. X.

Illa autem expreſſio prope vera ad inveniendam aream PSM magis erit accommodata, cum enim elementum hujus areæ ſeu ſector MSm ſit $= \frac{1}{2}yy\,dv$, erit hoc differentiale $= \frac{yy\,dt}{1+tt} = aadt\,(1+tt)\left(1-\alpha tt - \frac{\alpha\alpha tt}{2} + \frac{3\alpha\alpha t^4}{4}\right) = aadt\,(1+tt - \alpha tt$

$-\alpha t^4 - \frac{\alpha\alpha tt}{2} + \frac{\alpha\alpha t^4}{4} + \frac{3\alpha\alpha t^6}{4}$). Hinc integrando fiet area SPM $= aa\,(t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\alpha t^3 - \frac{1}{5}\alpha t^5 - \frac{1}{6}\alpha\alpha t^3 + \frac{7}{20}\alpha\alpha t^5 + \frac{3}{28}\alpha\alpha t^7)$ quæ ut tempus præbeat per SM, dividi debet per radicem quadratam ex latere recto. Cum ergo latus rectum ſit $2b = 2a(2-\alpha)$ erit $\sqrt{2b} = \sqrt{a(4-2\alpha)}$ & $\frac{1}{\sqrt{2b}} = \frac{1}{\sqrt{a}}(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{8} + \frac{3\alpha\alpha}{64}$; unde ſit $\frac{ar.\,SMP}{\sqrt{2b}} = \frac{a\sqrt{a}}{2}\,(t + \frac{1}{3}t^3 + \alpha\,(\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{5}t^5) + \alpha\alpha(\frac{3}{32}t - \frac{7}{32}t^3 + \frac{3}{28}t^7)$ hinc concluditur tempus, quo cometa ſpatium PM abſolvit, $= \frac{a\sqrt{a}}{384651,1}\,(t + \frac{1}{3}t^3 + \alpha\,(\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{5}t^5) + \alpha\alpha(\frac{3}{32}t - \frac{7}{32}t^3 + \frac{3}{28}{}^7)$ dierum: ſeu $= \frac{a\sqrt{a}}{384651,5.\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha)}}\,(t + \frac{1}{3}t^3 - \alpha(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5) - \alpha\alpha(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{20}t^5 - \frac{3}{28}t^7))$ dierum. Cum autem ſit $y = \frac{a(2-\alpha)\,(1+tt)}{2-\alpha(1+tt)}$ erit $tt = \frac{(2-\alpha)\,(y-a)}{2a-\alpha(a+y)}$ & vero proxime $tt = \frac{y-a}{a} + \frac{\alpha y(y-a)}{2aa} + \frac{+\alpha\alpha y\,(yy-aa)}{4a^3}$. Sufficiet vero ad præſens inſtitutum terminos in quibus ineſt $\alpha\alpha$ negligere; propterea quod in hoc cometa, cujus curſum ſum determinaturus, quoad apparuit angulus PSM minor fuit recto, ideoque $t < 1$, & poteſtates ipſius t ſuperiores multo magis unitate minores. Erit ergo $tt = \frac{y-a}{a} + \frac{\alpha y(y-a)}{2aa}$ & $t = \left(1 + \frac{\alpha y}{4a}\right)\sqrt{\frac{y-a}{a}}$; atque $t^4 = \frac{(y-a)^2}{aa} + \frac{\alpha y\,(y-a)^2}{a^3}$; unde cum tempus per PM ſit $= \frac{a\sqrt{a}}{384651,5\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha)}}\,(t + \frac{1}{3}t^3 - \alpha\,(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5))$ dierum, erit per y hoc idem tempus $= \frac{(a+\frac{1}{4}\alpha y)\sqrt{(y-a)}}{384651,5\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha)}}\left(\frac{y+2a}{3a} - \frac{\alpha(y-a)(\alpha a+y)}{30aa}\right)$ dierum.

§. XI.

§. XI.

Si ergo præter a & α, atque tempus, quo cometa per perihelium tranſiit, detur vel anomalia vera v, eujus ſemiſſis tangens $= t$, vel diſtantia cometæ a ſole SM $= y$; poterit hinc tempus, quo cometa in hoc loco orbitæ ſuæ hæret, per expreſſiones datas aſſignari, ſiquidem α fuerit fractio minima. Sin autem tempus hoc fuerit datum puta $= n$ diebus, inventio anomaliæ veræ v aliquanto fit difficilior, quam in caſu parabolæ, requirit enim reſolutionem hujus æquationis $\frac{n}{N} = t + \frac{1}{3}t^3 - \alpha(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5)$, ſiquidem ponatur N pro numero $\frac{a\sqrt{a}}{384651,5\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha)}}$. Interim tamen, quia α eſt fractio minima, hæc reſolutio ope tabulæ pro motu in parabola exhibitæ, effici poterit. Quæratur enim in tabula ſub columna $t + \frac{1}{3}t^3$ anomalia vera reſpondens, quæ ſit $= u$, & ponatur tang $\frac{1}{2}u = \theta$, erit $\frac{n}{N} = \theta + \frac{1}{3}\theta^3$. Jam anomalia vera pro caſu ellipſis, quæ ab hac inventa u non multum diſcrepabit, ſit $= u + \Phi = v$, ita ut ſit tang $\frac{1}{2}v =$ tang $(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\Phi) = t$, unde ob Φ arcum minimum fit $t = \theta + \frac{1}{2}\Phi\,(1 + \theta\theta)$, ſubſtituatur hic valor in æquatione, & ob $\frac{n}{N} = \theta + \frac{1}{3}\theta^3$ reperietur $\Phi = \frac{2\alpha\theta^3\,(5 + 3\theta\theta)}{15\,(1 + \theta\theta)^2}$, qui angulus, cum æqualis prodeat numero, invenietur ſi a logarithmo expreſſionis $\frac{2\alpha\theta^3\,(5 + 3\theta\theta)}{15\,(1 + \theta\theta)^2}$, denario aucto ſubtrahatur 4, 6855749, numerus enim logarithmo reſiduo reſpondens dabit angulum Φ in minutis ſecundis expreſſum; cum autem ſit $\theta =$ tang $\frac{1}{2}u$, habebitur quoque $\Phi = \frac{2}{3}\alpha\,(\sin\frac{1}{2}u)^2$ tang $\frac{1}{2}u + \frac{2}{15}\alpha\,(\sin\frac{1}{2}u)^2 \sin u$; quæ expreſſio

facilius

facilius per logarithmos expeditur. Inventa autem anomalia vera v, reperitur diſtantia cometæ a ſole SM $= y$ ex hac æquatione $y = \frac{a(1-\alpha)}{1+(1-\alpha)\cos v}$; vel adhibitis approximationibus erit commodius $y = \frac{a}{(\cos \frac{1}{2} v)^2} - \frac{\alpha a (\tang \frac{1}{2} v)^2}{2(\cos \frac{1}{2} v)^2}$

§. XII.

Fig. II. Orbitam autem cometæ ex obſervationibus tribus aſſumtis ita determinabo, ut duas cometæ a ſole diſtantias a S & c una cum angulo intercepto a S c ſeu corda $a\,c$ inveniam, ex quibus deinceps orbitam cometæ, ſive ea ſit parabolica ſive elliptica, definiri oportet. Quamobrem ex datis duabus cometæ a ſole diſtantiis a S & c S una cum corda $a\,c$ ipſam orbitam cometæ ſive parabolicam ſive ellipticam ſpecie datam inveniri conveniet. Ponatur a S $= f$; c S $= g$ & corda $ac =$ k; ac primo quidem pro parabola ſit diſtantia perihelii P a ſole S nempe PS $= a$; & anomalia vera ſeu angulus PS$a = v$, quæ ſunt duæ res ex datis definiendæ; ſit angulus aS$c = q$; anomalia vera PS$c = v + q$; hincque duæ ſequentes æquationes reſultabunt; $f = \frac{a}{(\cos \frac{1}{2} v)^2}$ & $g = \frac{a}{(\cos \frac{1}{2} (v+q))^2}$; ex quibus eliminata a fit $\sqrt{\frac{f}{g}} = \frac{\cos \frac{1}{2}(v+q)}{\cos \frac{1}{2} v} = \cos \frac{1}{2} q -$ $\sin \frac{1}{2} q . \tang \frac{1}{2} v$: ideoque $\tang \frac{1}{2} v = \frac{\cos \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{f}{g}}}{\sin \frac{1}{2} g}$; unde angulus PS$a = v$, ideoque poſitio axis PS determinabitur. Quoniam vero angulus q non immediate datur, ſed demum ex triangulo a S c, in quo omnia latera ſunt cognita, erui debet;

debet; hanc eandem expreſſionem per ſola latera f, g & k exprimamus. Cum itaque ſit coſ. $q = \frac{ff + gg - kk}{2fg}$, erit coſ.

$$\tfrac{1}{2} q = \sqrt{\frac{1 + \text{coſ.}\, q}{2}} = \sqrt{\frac{(f+g)^2 - kk}{4fg}} = \frac{\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{2\sqrt{fg}};$$

$$\& \text{ ſin } \tfrac{1}{2} q = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ.}\, q}{2}} = \sqrt{\frac{-(f-g)^2 + kk}{4fg}} = \frac{\sqrt{(f-g+k)(g-f+k)}}{2\sqrt{fg}}.$$

Ex his naſcitur $\text{tang.}\, \tfrac{1}{2} v = \frac{\sqrt{(f+g+k)}}{\sqrt{(f-g+k)}} \frac{(f+g-k) - 2f}{(g-f+k)}$;

$$\& \text{ ſec.}\, \tfrac{1}{2} v = \frac{2\sqrt{(ff + fg - f\sqrt{(f+g+k)}}}{\sqrt{(f-g+k)}} \frac{(f+g-k))}{(g-f+k)}$$

$$= \frac{\sqrt{2f(f+g+k)} - \sqrt{2f(f+g-k)}}{\sqrt{(f-g+k)(g-f+k)}}.$$

$$\text{ergo ſin } \tfrac{1}{2} v = \frac{\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)} - 2f}{\sqrt{2f(f+g+k)} - \sqrt{2f(f+g-k)}} = \frac{\frac{(g-f+k)}{2}\sqrt{\frac{f+g-k}{2}} - \frac{(f-g+k)}{2}\sqrt{\frac{f+g+k}{2}}}{k\sqrt{f}}$$

$$\& \text{ coſ.}\, \tfrac{1}{2} v = \frac{\sqrt{(f-g+k)(g-f+k)}}{\sqrt{2f(f+g+k)} - \sqrt{2f(f+g-k)}}.$$

Cum igitur ſit $(\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} v)^2 = \frac{(f-g+k)(g-f+k)}{4f(f+g) - 4f\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}$; ob $a = f\ (\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} v)^2$,

$$\text{erit } a = \frac{(f-g+k)(g-f+k).}{4(f+g) - 4\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}$$

§. XIII.

Hinc tempus definiri poteſt, quod cometa ad ſpatium ac conficiendum impendit, per ſolas litteras f, g, & k; hoc enim tempore imprimis opus habeo ad calculum ſequentem expediendum. Sit tang. $\tfrac{1}{2}$ PSa $= r$; & tang. $\tfrac{1}{2}$ PSc $= s$; erit uti vi-

 dimus

dimus $t = \frac{\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}-2f}{\sqrt{(f-g+k)(g-f+k)}}$ & $s = \frac{-\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}+2g}{\sqrt{(f-g+k)(g-f+k)}}$. Cum ergo tempus a perihelio ad locum a ſit $= \frac{a\sqrt{a}}{m}(t+\frac{1}{3}t^3)$ & tempus a perihelio ad locum c ſit $= \frac{a\sqrt{a}}{m}(s+\frac{1}{3}s^3)$, poſito m pro numero 384651,5; erit tempus, quo cometa ſpatium ac abſolvit $= \frac{a\sqrt{a}}{m}(s+\frac{1}{3}s^3-t-\frac{1}{3}t^3) = \frac{a\sqrt{a}}{m}(s-t)(1+\frac{1}{3}ss+\frac{1}{3}st+\frac{1}{3}tt)$. Eſt vero $s-t = \frac{2(f+g)-2\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{\sqrt{(f-g+k)(g-f+k)}}$, $s+t = \frac{2(g-f)}{\sqrt{(f-g+k)(g-f+k)}}$; ex his oritur $ss+1 = \frac{4g(f+g)-4g\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{(f-g+k)(g-f+k)}$, $tt+1 = \frac{4f(f+g)-4\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{(f-g+k)(g-f+k)}$ & $1+st = \frac{2(f+g)-2\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{(f-g+k)(g-f+k)}\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}$. His additis fit $3+ss+st+tt = \frac{2(+g)-2\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{(f-g+k)(g-f+k)}(2(g+f)+\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)})$, ideoque habebitur $(s-t)(1+\frac{1}{3}ss+\frac{1}{3}st+\frac{1}{3}tt) = \frac{4(f+g-\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)})}{3(f-g+k)^{\frac{3}{2}}(g-f+k)^{\frac{3}{2}}}(2(f+g)+\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)})$. At eſt $a\sqrt{a} = \frac{(f-g+k)^{\frac{3}{2}}(g-f+k)^{\frac{3}{2}}}{8(f+g-\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)})^{\frac{3}{2}}}$, quæ duæ expreſſiones ob $\sqrt{(f+g-\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)})} = \sqrt{\frac{f+g+k}{2}}-\sqrt{\frac{f+g-k}{2}}$ in ſe mutuo ductæ dant $\frac{a\sqrt{a}}{m}(s-t)(1+\frac{1}{3}ss+\frac{1}{3}st+\frac{1}{3}tt) = \frac{1}{6m}(2f+2g+\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}$

$\sqrt{f}+$

$\frac{(\sqrt{f+g+k})}{2} - \frac{\sqrt{f+g-k})}{2} = \frac{\frac{(f+g+k)^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{(f+g-k)^{\frac{3}{2}}}{2}}{3m}$ quæ expreſſio dat tempus, quo cometa in orbita parabolica motus ſpatium ac conficit, in diebus expreſſum.

§. XIV.

Hæc eadem expreſſio facilius inveniri poteſt, ſi tempora a perihelio P ad loca a & c ex diſtantiis f & g ſolis definiantur, erit enim manente $m = 384651,5$ tempus quo cometa ex P ad a pertingit $= \frac{(2a+f)\sqrt{(f-a)}}{3m}$ & tempus, quo cometa ex P ad c provenit $= \frac{(2a+g)\sqrt{g-a)}}{3m}$ dierum (7). Cum autem ſit $a = \frac{kk-ff+2fg-gg}{4f+4g-4\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}$ erit $f-a = \frac{5ff+2fg+gg-kk-4f\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{4f+4g-4\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}$ & $\sqrt{(f-a)} = \frac{-2f+\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{\sqrt{2(f+g+k)}-(\sqrt{2(f+g-k)}}$ $= \frac{-(f-g+k)\sqrt{2(f+g+k)}+(g-f+k)\sqrt{2(f+g-k)}}{4k}$ & $\sqrt{(g-a)}$ $= \frac{2g-\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{\sqrt{2(f+g+k)}-\sqrt{2(f+g-k)}} = \frac{+(g-f+k)\sqrt{2(f+g+k)}-(f-g+k)}{4k}$ $\sqrt{2(f+g-k)}$. Quoniam igitur tempus ac eſt $= \frac{1}{3m}(2a(\sqrt{(g-a)}-\sqrt{(f-a)}) + g\sqrt{(g-a)} - f\sqrt{(f-a)})$ fiet $\sqrt{(g-a)} - \sqrt{(f-a)} = \frac{2f+2g-2\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{\sqrt{2(f+g+k)}-\sqrt{2(f+g-k)}}$ ideoque

$2a(\sqrt{g-a)}-\sqrt{(f-a)}) = \frac{kk-ff+2fg-gg}{\sqrt{2(f+g+k)}-\sqrt{2(f+g-k)}}$

& $g\sqrt{(g-a)} - f\sqrt{(f-a)} = \frac{2ff+gg-(f+g)\sqrt{(f+g+k)(f+g-k)}}{\sqrt{2(f+g+k)}-\sqrt{2(f+g\,k-)}}$

Ergo tempus per $ac = \frac{1.}{3m} \frac{kk+(f+g)^2-(f+g)\sqrt{(f+g+k(f+g-k)}}{\sqrt{2(f+g+k)}-\sqrt{2(f+g-k)}}$ dierum, cujus fractionis ſi numerator & denominator per

$\sqrt{2(f+g+k)} + \sqrt{2(f+g-k)}$ multiplicetur, prodibit tempus quo cometa ab a ad c progreditur $= \frac{1}{3m}\left(\frac{(f+g+k)^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{(f+g-k)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)$ dierum $= \dfrac{\frac{(f+g+k)^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{(f+g-k)^{\frac{3}{2}}}{2}}{1153954,5}$ dierum quæ expreſſio uti ad calculum maxime eſt accommodata, ita etiam imprimis notata eſt digna, quod tempus, quo cometa in parabola latus datum ſpatium $a\,c$ abſolvit, tum concinne ex ſolis diſtantiis a S & c S una cum corda $a\,c$ poſſit exprimi.

§. XV.

Difficilius hæc expedientur, ſi curva, in qua cometa movetur, ponatur ellipſis ſpecie data. Manentibus autem $a\mathrm{S} = f$, $c\,\mathrm{S} = g$ & corda $a\,c = k$, quæ ſunt data, cum relatione inter SI & SP; quæ ſit uti ſupra poſuimus ut 1 ad $2-\alpha$. Ponatur ergo diſtantia perihelii a ſole $\mathrm{SP} = a$; erit ſemi-latus rectum $\mathrm{SI} = (2-\alpha)a$; ſit inſuper anomalia vera $\mathrm{PSa} = v$, & poſito angulo $\mathrm{aSc} = q$ erit anomalia vera $\mathrm{PSc} = v+q$. Jam ex natura ellipſis erit $f = \frac{a(2-\alpha)}{1+(1-\alpha)\cos v}$ & $g = \frac{a(2-\alpha)}{1+(1-\alpha)\cos(v+q)}$ ideoque $\frac{f}{g} = \frac{1+(1-\alpha)\cos(v+q)}{1+(1-\alpha)\cos v} = \dfrac{\frac{1}{1-\alpha} + \cos v \cos q - \sin v \sin q}{\frac{1}{1-\alpha} + \cos v}$ ſeu

$\frac{f-g}{1-\alpha} = g \cos v . \cos q . - f \cos v . - g \sin v . \sin q .$ vel $g \sin q . \sin v . = g \cos q . \cos v . - f \cos v . + \frac{g-f}{1-\alpha}$. Quod ſi ſumatur hæc æquatio generalis $A \sin v = B \cos v + C$ fiet $\cos v = \frac{-BC + A\sqrt{(AA+BB-CC)}}{AA+BB}$ eſt que noſtro caſu $A = g \sin q$; $B = g \cos q - f$; & $C = \frac{g-f}{1-\alpha}$

hinc

hincque $AA + BB = ff - 2fg\,\text{coſ}\,v + gg = kk$. Hinc cum ſit $\text{ſin}\,\frac{1}{2}v = \frac{\sqrt{1-\text{coſ}.v}}{2}$ erit $\text{ſin}\,\frac{1}{2}v = \frac{\sqrt{(k+B)(k+C)} - \sqrt{(k-B)(k-C)}}{2k}$. Invento autem angulo $PSa = v$ fiet $a = \frac{f(1+(1-\alpha)\,\text{coſ}.v)}{2-\alpha}$; & ſi loco coſ v valor inventus ſubſtituatur, vel ex binis æquationibus, ſuperioribus angulus v eliminetur, reperietur $(2-\alpha)\,a = b =$

$$\frac{4fg - (1-\alpha)^2(f+g+k)(f+g-k)}{2(f+g) - 2\sqrt{\frac{(f+g+k)(f+g-k)((1-\alpha)k-f+g)((1-\alpha)k+f-g)}{(k-f+g)(k+f-g)}}}.$$

Quocirca formulis, quæ commodiores videbuntur, uti licebit ad rectam a & angulum v inveniendum. Quibus inventis erit tempus, quo cometa ab a ad c pervenit, in diebus expreſſum $=$

$$\frac{(a+\frac{1}{4}\alpha g)\sqrt{(g-a)}}{m\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha)}}\left(\frac{2a+g}{3a} - \frac{\alpha(g-a)(4a+g)}{30aa}\right) - \frac{(a+\frac{1}{4}\alpha f)\sqrt{(f-a)}}{m\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha)}}\left(\frac{2a+f}{3a} - \frac{\alpha(f-a)(4a+f)}{30aa}\right)$$

denotante $m = 384651,5$.

§. XVI.

Hos igitur ad orbitam cometæ menſe martio hujus anni obſervati determinandam accommodabo. Obſervationes autem, quibus ad hoc inſtitutum utar, mecum communicatæ ſunt a Celeberrimo Aſtronomo De-Lisle, quas ſumma cura in obſervatorio Petropolitano habuit. Tempora autem, quibus hæ obſervationes ſunt factæ, primo ad ſtilum veterem & meridianum Londinenſem commoditatis gratia reduxi, tum vero in tempus aſtronomicum medium converti: obſervatæ autem ſunt temporibus indicatis cometæ longitudines ac latitudines, uti ſequens tabella declarat.

Anno 1742.			Longit. Cometæ.			Latit. Cometæ Borealis.	
Febr. 25^d,	10^h,	0′	9^s,	$24^°$,	13′	$56^°$,	29′
27^d,	10^h,	13′	10,	3,	16	66,	41
28^d,	6,	49	10,	9,	3	70,	30
—	15,	8	10,	11,	56	71,	54
Mart. 1^d,	7,	57	10,	19,	12	74,	30
—	15,	10	10,	22,	13	75,	29
2^d,	7,	2	11,	1,	49	77,	24
—	7,	39	11,	2,	15	77,	28
3^d,	14,	43	11,	24,	4′	79,	30
4^d,	14,	34	0,	13,	20	79,	55
6^d,	13,	55	1,	12,	24	77,	46
—	14,	15	1,	12,	44	77,	37
15^d,	6,	45	2,	16,	18	65,	20
16^d,	6,	38	2,	17,	31	64,	16
17^d,	7,	50	2,	18,	52	63,	13

Factæ ergo ſunt hæ obſervationes trium hebdomadarum intervallo, quod etſi tempus ſatis eſt exiguum, tamen motus cometæ ſecundum longitudinem per *6* fere ſigna eſt abſolutus, ex quo celerrimo motu orbita cometæ ſatis exacte definiri poterit, cum errores obſervationum in orbitæ determinatione non ſolum non multiplicentur, ſed etiam tantopere diminuantur, ut prorſus evaneſcant.

§. XVII.

Ad ſingula hæc obſervationum tempora jam primum loca ſolis vel terræ exactiſſime definiri debent, cum enim motus cometæ ſit celerrimus, niſi loca terræ, ad quæ cometæ loca referuntur, ſint accuratiſſime cognita, ex minimis erroribus maximi errores in motum cometæ verum redundarent. Quamobrem ad inventionem locorum terræ relictis tabulis aſtronomicis malo ea motus telluris theoria uti, quam alia occaſione

ex

ex obſervationibus exquiſitiſſimis elicui. Reduxi autem hanc theoriam ad Calendarium Julianum & meridianum Londinenſem, atque anomalia terræ media ad tempora deſcripta ita ſe habet;

Anno	Anomalia media				Long. 1 * ♈			
1701	6ˢ,	13°,	17′,	50″	0ˢ,	29°,	0′,	30″
1721	6,	13,	10,	14	0,	29,	17,	10
1741	6,	13,	2,	38	0,	29,	33,	50
1761	6,	12,	55,	2	0,	29,	50,	30
1781	6,	12,	47,	26	1,	0,	7,	10
1801	6,	12,	39,	51	1,	0,	23,	50

Intelliguntur hic anni currentes, atque anomaliæ mediæ reſpondent meridiei ultimi diei anni præcedentes. Pro annis autem mediis motus terræ medius ex ſequenti tabella colligetur, pariter ac pro initio cujusque menſis.

Annis	Motus medius	Præc. Æquin
1	11ˢ, 29°, 44′, 50″	0°, 0′, 50″
2	11, 29, 29, 40	0, 1, 40
3	11, 29, 14, 30	0, 2, 30
4	11, 29, 58, 29	0, 3, 20
5	11, 29, 43, 19	0, 4, 10
6	11, 29, 28, 9	0, 5, 0
7	11, 29, 12, 59	0, 5, 50
8	11, 29, 56, 58	0, 6, 40
9	11, 29, 41, 48	0, 7, 30
10	11, 29, 26, 38	0, 8, 20
11	11, 29, 11, 28	0, 9, 10
12	11, 29, 55, 27	0, 10, 0
13	11, 29, 40, 17	0, 10, 50
14	11, 29, 25, 7	0, 11, 40
15	11, 29, 9, 57	0, 12, 30
16	11, 29, 53, 56	0, 13, 20
17	11, 29, 38, 46	0, 14, 10
18	11, 29, 23, 36	0, 15, 0
19	11, 29, 8, 26	0, 15, 50
20	11, 29, 52, 24	0, 16, 40

Menſe	Motus medius	Præc
Januar.	0ˢ, 0°, 0′, 0″	0″
Februar.	1, 0, 33, 14	4
Martio	1, 28, 9, 4	8
Aprili	2, 28, 42, 18	12
Majo	3, 28, 16, 24	17
Junio	4, 28, 49, 37	21
Julio	5, 28, 23, 43	25
Auguſto	6, 28, 56, 57	29
Septemb.	7, 29, 30, 11	34
Octobr.	8, 29, 4, 17	38
Novemb.	9, 29, 37, 30	42
Decembr.	10, 29, 11, 36	46

§. XVIII.

§. XVIII.

Motus diurnus medius & horarius terræ non differt a reliquis tabulis, quamobrem iſta tabulæ mediorum motuum partem hic prætermitto. Deinde longitudinem aphelii orbitæ terræ a prima ſtella arietis computatam conſtanter ſtatuo $8^s, 8^\circ, 25', 42''$, & poſita diſtantia terræ a Sole media $= 100000$, orbitæ terræ excentricitatem inveni eſſe 1687, 3, hincque æquationem maximam $1^\circ, 56', 0''$. Ex his datis ad quod vis tempus locus terræ verus in ecliptica poterit definiri una cum ejus diſtantia a Sole, ſequenti modo. Ex tabula motuum mediorum colligatur ad propoſitum tempus anomalia terræ media, una cum longitudine primæ ſtellæ arietis; ſit anomalia terræ media inventa $= x$; tum quæratur anomalia *excentrica dicta* v per hanc æquationem $v = x - k$ ſin $(x - k$ ſin $(x - k$ ſin $(x - k$ ſin $(x$ &c.$))$ ubi eſt $k = \frac{16873}{1000000}$, & $lk = 8, 2271923$ aucta characteriſtica denario. Occurrunt hic ſinus arcuum per k multiplicati, qui in arcus converti debent, id quod fit ſi a logarithmo ſinus ſubtrahatur hic logarithmus 6, 4583826 tum enim numerus reſiduo logarithmo reſpondens dabit arcum quæſitum in minutis ſecundis. Inventa anomalia excentrica v erit primum diſtantia terræ a Sole $= 100000\ (1 + k$ coſ$(v))$; ac deinde anomalia vera $z = v -$ tang. $\frac{1}{2}\alpha$ ſin $v +$ (tang. $\frac{1}{2}\alpha)^2$ ſin $2v$, exiſtente α arcu cujus ſinus eſt k. In anomaliæ veræ igitur inventione primo a logarithmo *ſin.* v ſubtrahatur 6,4583517; & a logarithmo ſin. $2v$, ſubtrahatur 8, 8331885; numerus priori logarithmo reſiduo reſpondens dat arcum $= 2$ tang. $\frac{1}{2}\alpha$ ſin v, & numerus poſteriori logarithmo reſiduo reſpondens

dabit

dabit arcum $=$ (tang. $\frac{1}{2}\alpha)^2$ ſin $2v$, utrumque in minutis ſecundis expreſſum. Denique ad anomaliam veram z inventam addatur primo longitudo aphelii a 1 * ♈ $= 8^s, 8^\circ 25', 42''$, & inſuper longitudo ipſius primæ ſtellæ arietis, ſicque prodibit longitudo terræ ab æquinoctio verno computata; quæ 6 ſignis ſive aucta ſive minuta dabit locum Solis verum in ecliptica.

§. XIX.

Quo uſus hujus regulæ facilius percipiatur ad meridies trium ultimarum obſervationum ſpeciminis loco terræ loca quæram; ſi enim ad meridiem cujusque diei habeatur locus terræ vel ſolis, pro quovis tempore intermedio per interpolationem idem inveniri poterit. Sit igitur primum propoſitum hoc tempus A. 1742. M. Martio, $15^d, 0^h, 0'$, ad quod anomalia media eruatur.

	Anomalia media	Long. 1 * ♈
A. 1741	$6^s, 13^\circ, 2'\ 28''$	$0^s, 29^\circ, 33'\ 50''$
Ann. 1	11, 29, 44, 50	50
M. Mart.	1, 28, 9, 4	8
15 d.	: 14, 47, 3	2
A. 1742. Mart. 15	8, 25, 43, 25	$0^s, 29^\circ, 34'\ 50$
Mart. 16	8, 26, 42, 33	0, 29, 34, 50
Mart. 17	8, 27, 41, 41	0, 29, 34, 50

Eſt ergo anomalia media x ſex ſignis major, ponatur $x = 6^s + s$, erit ſin $x = -$ ſin s, ideoque anomalia *excentrica* erit $v = x + k$ ſin $(s + k$ ſin $(s + k$ ſin s &c.$))$, unde calculus pro inventione anomaliæ excentricæ ita ſe habebit.

	Pro Mart. 15 d.	Pro Mart. 16 d.	Pro Mart. 17 d.
s =	85°,43′25″	86°,42′33″	87°,41′,41″
l ſin s =	9,9987853	9,9992793	9,9996449
ſubtr.	6,4583826	6,4583826	6,4583826
	3,5404027	3,5408967	3,5412623
k ſin s =	3471″	3474″	3477″
ſeu =	57′,51″	57′54″	57′, 57″
addatur ad s —	86°,41′, 16″	87′,40′,27″	88°, 39′ 38″
l ſin =	9,9992720	9,9996398	9,9998794
ſubtr.	6,4583826	6,4583826	6,4583826
	3,5408894	3,5412572	3,5414968
Arcus	3474″	3477″	3479,″
ſeu	57′, 54″	57′,57″	57′,59″
add. ad s	86°,41′, 19″	87°,40′, 30″	88° 39′,40″
Ergo v =	8^s,26°,41′19″	8^s,27°,40,′30″	8^s,28°,39′,40″

ſcilicet quia ulteriores operationes perpetuo eundem valorem eſſent exhibituræ pro k ſin ($s + k$ ſin ($s +$ &c.): poſt ſecundam calculus jam finiri poterit, ſicque expedite anomalia excentrica definitur, quod idem commodum perpetuo in ſimili calculo uſu veniet.

§. XX.

Cum jam diſtantia terræ a ſole ſit = 100000 + 100000 k coſ v; v vero ſit angulus duobus rectis major, tribus vero minor, ejus coſinus erit negativus, ideoque ſi ponatur $v = 6^s + s$, erit diſtantia terræ a ſole = 100000 − 100000 k coſ s: unde calculus ita inſtituetur.

Mart.

	Mart. 15 d.	Mart. 16 d.	Mart. 17 d.
$s =$	86°,41′,19″	87, 40, 30	88, 39′, 40
l coſ $s =$	8,7616457	8,6081811	8,3685824
l 100000 k =	3,2271923	3,2271923	3,2271923
	1,9888380	1,8353734	1,5957747
100000k coſ. $s =$	97, 46	68, 45	39, 42
ſubtr. ab	100000	100000	100000
Diſt. ♁ a ☉ =	99902,54	99931,55	99960,58
l diſt. ♁ a ☉ =	4,9995766	4,9997026	4,9998287

Ad anomaliam denique veram inveniendam, ob $v = 6^s + s$ erit ſin $v = -$ ſin s & ſin $2v =$ ſin $2s$, hincque anomalia vera $z = v + 2$ tang. $\frac{1}{2}\alpha$. ſin $s +$ (tang $\frac{1}{2}\alpha)^2$ ſin $2s$. Fiet ergo

$s =$	86°, 41′, 19″	87°, 40′, 30″	88°, 39′, 40″
$2s =$	173, 22, 38	175, 21, 0″	177°, 19, 20
$180 - 2s =$	6, 37, 22	4, 39, 0	2, 40, 40
l ſin $s =$	9,9992720	9,9996423	9,9998814
ſubtr.	6,4583517	6,4583517	6,4583517
	3,5409203	3,5412906	3,5415297
2tang $\frac{1}{2}\alpha$. ſin $s =$	3475	3478	3480
ſeu	57′,55″	57′58″	58′,0″
l ſin $2s =$	9,0619501	8,9088535	8,6676893
ſubtr.	8,8331885	8,8331885	8,8331885
	0,2287616	0,0756650	9,8345008
(tang $\frac{1}{2}\alpha)^2$ ſin $2s$	2″	1″	0″
add. ad $v =$	8^s,26°,41,19″	8,27°,40,30	8,28,39,40
Anomalia vera	8,27°,39,16	8,28,38,29	8,29,37,40
addantur	8, 8, 25,42	8, 8,25,42	8, 8,25,42
Præc. Æquin.	0,29,34,50	0,29,34,50	0,29,34,50
Longit. terræ.	6^s, 5,39,48	6, 6,39, 1	6, 7,38,12

§. XXI.

Similì modo pro meridie ſingulorum reliquorum dierum, quibus obſervationes ſunt factæ, terræ loca in ecliptica, ejusque a ſole diſtantias computavi, quæ hic annectuntur.

St. v. Meridie Londini.	Longitudo terræ.	Long. diſt. terræ a ſole.	Diſtantia terræ a ſole.
Febr. d. 24	5, 16°, 48′, 17″	4,9972340	99365,15
25	5, 17, 48, 9	4,9973527	99392,31
26	5, 18, 47, 59	4,9974722	99419,64
27	5, 19, 47, 48	4,9975922	99447,[illegible]3
28	5, 20, 47, 35	4,9977131	99474,80
Mart. d. 1	5, 21, 47, 20	4,9978344	99502,60
2	5, 22, 47, 3	4,9979563	99530,53
3	5, 23, 46, 44	4,9980788	99558,61
4	5, 24, 46, 23	4,9982018	99586,80
5	5, 25, 45, 59	4,9983251	99615,10
6	5, 26, 45, 33	4,9984491	99643,53
7	5, 27, 44, 55	4,9985734	99672,05
8	5, 28, 44, 34	4,9986980	99700,67
⋮	⋮	⋮	⋮
15	6, 5, 39, 48	4,9995766	99902,54
16	6, 6, 39, 1	4,9997026	99931,56
17	6, 7, 38, 12	4,9998287	99960,58

§. XXII.

Si hæc terræ loca comparentur cum locis cometæ obſervatis, facile colligitur tempore quodam inter 3 & 4 diem martii ſolis & cometæ eandem fuiſſe longitudinem, ſeu cometam cum ſole in conjunctione fuiſſe; hocque mox poſt obſervationem Mart. 3^d, 14^h, $43'$, ubi longitudo cometæ obſervata eſt 11^s, 24°,

24°, 4′, eveniſſe. Ad hoc enim tempus locus ſolis colligitur fuiſſe 11ˢ, 24°, 23′, 19″, ejusque motus horarius erat 2′, 29″. Motus cometæ horarius autem ſi cum præcedente comparetur, reperitur 42′, 8″, ſin autem cum obſervatione ſequente conferatur, erit is 48′, 28″: ex quo hoc ipſo obſervationis tempore motus cometæ horarius ſecundum longitudinem erat quaſi 45′, 18″. Ponamus ergo conjunctionem veram eveniſſe Mart. 3^d, 14^h, 43′ + x hor. prodibit hoc tempore longitudo ſolis 11ˢ, 24°, 23′, 19″ + 149 x'', & longitudo cometæ 11ˢ, 24°, 4′, + 2718 x'', quæ longitudines ſibi æquales poſitæ dant 19′, 19″ = 1159 = 2569 x; ideoque x horæ = 27′, ita ut conjunctio vera acciderit Mart. 3^d, 15^h, 10′, quo tempore ſolis & cometæ longitudo erat eadem 11ˢ, 24°, 24′, 26″, quæ etſi non fuit obſervata, tamen loco obſervationis haberi poteſt.

§. XXIII.

Hoc igitur conjunctionis tempore iſtud acquirimus commodum, quod reliquæ obſervationes non ſuppeditant, ut longitudo cometæ heliocentrica innoteſcat; quippe quæ vel eadem eſſe debet, quæ eſt longitudo terræ, vel ei èdiametro oppoſita. Martii ſcilicet 3^d, 15^h, 10′ longitudo cometæ heliocentrica erat vel 5ˢ, 24°, 24′, 26″ vel 11ˢ, 24°, 24′, 26″ prout cometa fuerit vel cis vel trans ſolem verſatus. Mox autem patebit cometam hoc tempore nobis propiorem fuiſſe ſole, atque adeo ex ſole eandem longitudinem tenuiſſe ac terram. Hanc obrem iſte cometæ locus quaſi obſervatus cum duobus aliis commodiſſime adhibebitur ad orbitam cometæ inveſtigandam; eligantur ergo præter hunc cometæ locum duæ aliæ obſervationes, quarum altera ante, altera vero poſt conjunctionem

ſint habitæ; quæ neque ſint nimis viçinæ, neque nimis remotæ. Si enim ſumerentur duæ obſervationes nimis propinquæ, error ex obſervationum aberratione oriundus fieret ſenſibilis: ſin autem eſſent nimis remotæ, curvatura orbitæ impedimentum afferret. His perpenſis tria ſequentia cometæ loca ad hoc inſtitutum videntur aptiſſima.

Tempore.	Long. Com.	Lat. Comet.	Loc. Solis.	Diſt. terrae a Sole.
Febr. 28^d, 6^h, $49'$	10^s, $9°$, $3'$	$70°$, $30'$	11^s, $21°$, $4'$, $33''$	99482,70
Mart. 3, 15, 10	11, 24, 24	79, $31'$	11, 24, 24, 26	99576,55
Mart. 6, 14, 15	1, 12, 44	77, 37	11, 27, 20, 48	99660,46

Hic tempus inter obſervationem primam & mediam elapſum eſt 3^d, 8^h, $21' = 3,34791$ dies, quod ponatur $= m$, Tempus vero inter obſervationem mediam & tertiam elapſum eſt 2^d, 23^h, $5' = 2,96180$ dies, quod ponatur $= n$, a prima igitur ad ultimam obſervationem elapſum eſt tempus $= m + n = 6,30971$ dierum.

§. XXIV.

Repræſentet jam planities tabulæ planum eclipticæ, in quo Sol obtineat locum S: deſignentur tria terræ loca A, B & C tribus hisce obſervationibus convenientia, & ductis rectis AS, BS, CS erit. *Fig. 3.*

$$AS = 99482,70 \quad | \quad l\,AS = 4,9977476$$
$$BS = 99576,55 \quad | \quad l\,BS = 4,9981571$$
$$CS = 99660,46 \quad | \quad l\,CS = 4,9985229$$

& $\text{ang.}\,ASB = 3°, 19', 53''$
$\text{ang.}\,BSC = 2°, 56', 22''$
$\text{ang.}\,ASC = 6°, 16', 15''$

Quoniam

Quoniam porro ipſa recta BS exhibet cometæ longitudinem in obſervatione media, ducantur rectæ Aα, & Cγ, quæ deſignent cometæ longitudines obſervatas in obſervatione prima & ultima; quarum poſitio ita erit determinata, ut ſit:

ang. $SA\alpha = 42°, 1'$	ang. $AmB = 45°, 20', 53''$
ang. $SC\gamma = 45°, 24'$	ang. $CnB = 48°, 20', 22''$

in cometæ enim locis hic negligo minuta ſecunda, quia obſervationes non ultra minuta prima ſunt exactæ. Secant igitur rectæ Aα & Cγ rectam BS in punctis m & n, quæ primum definiri debebunt, ex formulis hisce, quas reſolutio triangulorum ſuppeditat.

$$Sm = \frac{AS.\ \text{ſin}\ SA\alpha}{\text{ſin}\ AmB};\quad Am = \frac{AS.\ \text{ſin}\ ASB}{\text{ſin}\ AmB}$$

$$Sn = \frac{CS.\ \text{ſin}\ SC\gamma}{\text{ſin}\ CnB};\quad Cn = \frac{CS.\ \text{ſin}\ BSC}{\text{ſin}\ CnB}$$

calculus ergo ita ſe habebit

l AS =	4,9977476	l CS =	4,9985229
l ſin AmB =	9,8521072	l ſin CnB =	9,8733764
	5,1456404		5,1251465
add. (l ſin SAα =	9,8256512	l ſin SCγ =	9,8524959
(l ſin ASB =	8,7642580	l ſin BSC =	8,7099518
l Sm =	4,9712916	l Sn =	4,9776424
l Am =	3,9098984	l Cn =	3,8350983
Sm =	93603, 40	Sn =	94982, 25
BS =	99576, 55	BS =	99576, 55
Bm =	5973, 15	Bn =	4594, 30
Am =	8126, 40	Cn =	6840, 66

& mn = 1378, 85

§. XXV.

§. XXV.

Si jam ponamus a p c eſſe portionem orbitæ cometæ, quam intervallo obſervationum aſſumtarum deſcripſerit, erit a ejus locus tempore obſervationis primæ, ex quo perpendiculum in eclipticam demiſſum $a\,\alpha$ in rectam A α incidit: & c, unde perpendiculum in C γ cadit, erit locus cometæ in tertia obſervatione; atque p erit ejus locus in obſervatione media, ſi quidem perpendiculum $p\,\pi$ in rectam B S incidit. Quare cum areæ circa ſolem deſcriptæ ſint tempuribus proportionales, erit area a S p ad aream p S c ut m ad n: atque ſi orbita cometæ in planum eclipticæ projiciatur $\alpha\,\pi\,\gamma$. quia ipſa orbita ad projectionem datam tenet rationem, erit quoque area α S π ad aream γ S π ut m ad n. Perſpicuum autem eſt rationem ſectorum α S π & γ S π tam prope ad rationem triangulorum α S β & β S γ accedere, ut error ſit prorſus imperceptibilis: cum quia ratio inter has areas fere eſt ratio æqualitatis, tum quia anguli α S β, & β S γ, ut ex ſequentibus patebit, tam ſunt parvi, ut curvatura hanc convenientiam turbare nullo modo poſſit. Cum igitur triangulorum α S β & β S γ ratio ſit ut m ad n erit, quoque $\alpha\beta : \beta\gamma = m : n$ ſicque ratio ſegmentorum cordæ $\alpha\,\gamma$ per rectam S B factorum erit cognita: unde ſi innoteſceret punctum β in recta B S, per quod corda $\alpha\gamma$ tranſit, ſimul poſitio cordæ ſeu angulus B $b\,\gamma$ definiri poſſet. Ponamus enim ang. B $\beta\,\gamma = \Phi$, erit in triangulo $\alpha\,m\,\beta$ ang. $\alpha\,m\,\beta =$ A m B & $m\,\alpha\,\beta = \Phi -$ A m B; in triangulo vero $\beta\,n\,\gamma$ erit ang. $\beta\,n\,\gamma =$ C n B, & $\beta\,\gamma\,n = 180^\circ - \Phi -$ B n C. Hinc fiet

$\alpha\beta =$

$$\alpha\beta = \frac{\beta m.\ \mathit{ſin}\ AmB}{\mathit{ſin}\ (\phi - AmB)} \quad \& \quad \beta\gamma = \frac{\beta n.\ \mathit{ſin}\ BnC}{\mathit{ſin}\ (\phi + BnC)}$$

quare cum ſit $\alpha\beta : \beta\gamma = m : n$ habebitur hæc æquatio $\frac{n.\beta m.\ \mathit{ſin}\ AmB}{\mathit{ſin}\ (\phi - AmB)} = \frac{m.\beta n.\ \mathit{ſin}\ BnC}{\mathit{ſin}(\phi + BnC)}$, ſeu ob ſin $(\phi - AmB) =$ ſin ϕ. coſ. AmB — coſ. ϕ. ſin AmB, & ſin $(\phi + BnC) =$ ſin ϕ. coſ. BnC + coſ. ϕ. ſin BnC, habebitur utroque denominatore per coſ. ϕ diviſo hæc æquatio

$$\frac{n.\ \beta m}{tang.\phi.\ cot.\ AmB - 1} = \frac{m.\ \beta n}{tang.\phi.\ cot.\ BnC + 1},$$ unde oritur

$$tang.\phi = \frac{\frac{m}{n}.\frac{Bn}{Bm} + 1}{\frac{m}{n}.\frac{Bn}{Bm}\ cot.AmB - cot.BnC}$$; ſicque ex cognito puncto β invenitur poſitio cordæ $\alpha\gamma$, hineque porro ob latitudines datas puncta a & c in orbita cometæ. Cum vero ſit

$m = 3,34791$ erit $l\ m = 0,5247738$

$n = 2,96180$ $\qquad l\ n = 0,4715557$

ideoque $l\frac{m}{n} = 0,0532181$

§. XXVI.

Huc ergo reducta eſt quæſtio, ut definiatur punctum β in recta Bβ, ſicque reſolutio quæſtionis ad unicam quantitatem incognitam eſt revocata. Neque tamen convenit, ut alias fieri ſolet, pro hac incognita characterem quempiam adhibere, eumque per æquationem determinare, propter expreſſiones maxime complicatas, ad quas perveniretur. Expediet ergo ex aliquot falſis pro Bβ aſſumtis valoribus, verum per regulam *falſi* eruere; ut evitentur litteræ indeterminatæ ejusmodi calculum trigonometricum plurimum perturbantes. Sumantur ergo

E pro

pro arbitrio aliquot valores pro intervallo $B\beta$; & cum pro quolibet conveniens angulus $\Phi = B\beta\gamma$ fuerit definitus, habebuntur duo cometæ loca vera *a* & *c*, quorum tam a ſole diſtantiæ aS, cS, quam angulus interceptus aSc ſeu corda *ac* aſſignari poterunt. Hinc ex præcedentibus præceptis, ſive orbita cometæ ſtatuatur parabola, ſive ellipſis perquam oblonga computetur tempus, quod cometa ad ſpatium *ac* abſolvendum per theoriam impendere debet; quod ſi conveniat cum tempore obſervato 6,30971 dierum, indicio id erit pro $B\beta$ valorem verum eſſe aſſumtum, ſin autem diſcrepet, duabus pluribusve hypotheſibus inter ſe comparandis valor prope verus ipſius $B\beta$ colligitur. Tum tribuantur denuo ipſi $B\beta$ duo valores non multum ab invento diſſidentes, qui cum ambo non multum a veritate ſint diſſenſuri, ſatis exacte verus valor pro $B\beta$ concludetur. Oportebit autem duplicem pro $B\beta$ valorem hoc pacto inveniri, alterum pro hypotheſi, qua orbita cometæ ſtatuitur parabola, alterum, ſi orbita cometæ ſtatuatur ellipſis ſpecie data, quo deinceps his duabus hypotheſibus cum reliquis obſervationibus comparandis vera ellipſeos ſpecies, ideoque vera cometæ orbita poſſit deduci.

§. XXVII.

Tribuam igitur ipſi $B\beta$ hos duos valores 8000 & 9000 quoniam per alia craſſiora tentamina jam cognovi verum valorem inter hos limites contineri; ac pro utroque primum angulum $\Phi = B\beta\gamma$ determinabo.

Sit ergo $B\beta$ =	8000,00	9000,00
ſubtr. Bm =	5973,15	6973,15
erit βm =	2026,85	3026,85
add. mn =	1378,85	1378,85
erit βn =	3405,70	4405,70
Jam ſumatur $l\beta n$ =	3,5322064	3,6440149
ſubtr. $l\beta m$ =	3,3068216	3,4809908
erit $l\,\frac{\beta n}{\beta m}$ =	0,2253848	0,1630241
add. $l\,\frac{m}{n}$ =	0,0532181	0,0532181
erit $l\,\frac{m.\beta n}{n.\beta m}$ =	0,2786029	0,2161422
add. l cot. AmB =	9,9947234	9,9947234
erit $l\,\frac{m.\beta n}{n.\beta m}$ cot.AmB =	0,2733263	0,2109656
Hinc fit $\frac{m.\beta n}{n.\beta m}$ =	1,899340	1,645289
Ergo fractionis Numerator	2,899340	2,645289
Porro $\frac{m.\beta n}{n.\beta m}$ cot. AmB =	1,876404	1,625420
ſubtr. cot. BnC =	0,889734	0,889734
erit fractionis denominator	0,986670	0,735686
A l numeratoris	10,4622992	10,4224731
ſubtr. l denominatoris	9,9941719	9,8666924
Erit l tang. Φ =	10,4681273	10,5557807
ideoque ang. $B\beta\gamma = \Phi$ =	71°,12′,22″	74°,27′,29″
Hinc reliqui anguli $\alpha m\beta$ =	45, 20, 53	45, 20, 53
ita ſe habebunt, ut $A\alpha\beta$ =	25, 51, 29	29, 6, 36
ſit $\beta n\gamma$ =	48, 20, 22	48, 20, 22
$C\gamma\beta$ =	60, 27, 16	58, 12, 9

§. XXVIII.

Quoniam nunc in triangulis $\alpha m \beta$, $\beta n \gamma$ dantur omnes anguli & latera βm & βn definientur reliqua latera per has formulas.

$$\alpha\beta = \frac{\beta m . \text{ſin}\, \alpha m \beta}{\text{ſin}\, A \alpha \beta}\ ; \quad \alpha m = \frac{\beta m .\ \text{ſin}\ \phi}{\text{ſin}\, A \alpha \beta}$$

$$\beta\gamma = \frac{\beta n . \text{ſin}\, \beta n \gamma}{\text{ſin}\, C \gamma \beta}\ ; \quad \gamma n = \frac{\beta n . \text{ſin}\, \phi}{\text{ſin}\, C \gamma \beta}$$

Inventis vero αm & γn erit $A\alpha = Am + \alpha m$ & $C\gamma = Cn + n\gamma$: calculus igitur ſequenti modo inſtituetur.

A $l\beta m$ =	3,3068216	3,4809908
ſubtr. l ſin $A\alpha\beta$ =	9,6396291	9,6870721
	3,6671925	3,7939187
add. (l ſin $\alpha m \beta$	9,8521072	9,8521072
(l ϕ	9,9762048	9,9838222
erit (l $\alpha\beta$ =	3,5192997	3,6460259
(l αm =	3,6433973	3,7777409
Erit ergo $\alpha\beta$ =	3305,98	4426,15
αm =	4399,44	5994,33
addatur Am =	8126,40	8126,40
erit $A\alpha$ =	12525,84	14120,73
Porro a $l\beta n$ =	3,5322064	3,6440149
ſubtr. l ſin $C\gamma\beta$ =	9,9395012	9,9293758
	3,5927052	3,7146391
addatur (l ſin $\beta n \gamma$ =	9,8733764	9,8733764
(l ſin ϕ =	9,9762048	9,9838222
erit (l $\beta\gamma$ =	3,4660816	3,5880155
(l γn =	3,5689100	3,6984613
erit ergo $\beta\gamma$ =	2924,70	3827,71
γn =	3706,04	4994,15
addatur C n =	6840,66	6840,66
erit $C\gamma$ =	10546,70	11834,81

§. XXIX.

Ex latitudinibus nunc obſervatis deducentur rectæ aα & cγ, erit enim aα = Aα tang. latit. & cγ = Cγ tang. latit. eſt vero latitudo in prima obſervatione = 70°, 30′, & latitudo in tertia = 77°, 37′. Inventis porro aα & cγ, ſi ducatur ak rectæ $\alpha\gamma$ parallela, erit $ak = \alpha\beta + \beta\gamma$; & $ck = c\gamma - a\alpha$: tum igitur invenitur angulus cak, ob tang. $cak = \frac{ck}{ak}$; ex hoc que angulo porro corda $ac = \frac{ck}{\text{ſin } cak}$, calculus ergo ita inſtituatur.

Ad *l* A α =	4,0978068	4,1498571
addatur *l* tang. lat.	10,4508513	10,4508513
erit *l* a α =	4,5486581	4,6007084
& a α =	35371,88	39875,71
Ad *l* C γ =	4,0231158	4,0731605
addatur *l* tang. lat.	10,6584481	10,6584481
erit *l* c γ =	4,6815639	4,7316086
& c γ =	48035,68	53902,47
ſubtr. a α =	35371,88	39875,71
erit c k =	12663,80	14026,76
Porro eſt $\alpha\beta$ =	3305,98	4426,15
addatur $\beta\gamma$ =	2924,70	3872,71
erit $\alpha\gamma$ = a k =	6230,68	8298,86
Nunc a *l* c k =	4,1025640	4,1469572
ſubtr. *l* a k =	3,7945355	3,9190184
erit *l* tang. c a k =	10,3080285	10,2279388
& c a k =	63°,48′,9″	59°,23′,22″
Ab *l* c k =	4,1025640	4,1469572
ſubtr. *l* ſin c a k =	9,9529268	9,9348257
erit *l* a c =	4,1496372	4,2121315
& a c =	14113,511	16297,89

§. XXX.

§. XXX.

Ducantur rectæ $S\alpha$ & $S\gamma$, atque in cordam $\alpha\gamma$ productam ex S ducatur normalis SQ: erit in triangulo rectangulo βSQ latus $S\beta = SB - B\beta$ cum angulis datum, ergo habebitur $SQ = S\beta$ ſin ϕ, $\beta Q = S\beta$ coſ. ϕ. Hinc erit $Q\alpha = Q\beta - \alpha\beta$ & $Q\gamma = Q\beta + \beta\gamma$: atque $\frac{QS}{Q\alpha} =$ tang. $S\alpha Q$, & $\frac{QS}{Q\gamma} =$ tang. $S\gamma Q$, quibus angulis cognitis erit $S\alpha = \frac{QS}{\text{ſin. } S\alpha Q}$ & $S\gamma = \frac{QS}{\text{ſin. } S\gamma Q}$: hæc ad computum revocentur:

a BS =	99576,55	99576,55
ſubtr. $B\beta$ =	8000,00	9000,00
erit $S\beta$ =	91576,55	90576,55
ſumatur $l\,S\beta$ =	4,9617843	4,9570157
add. (l ſin ϕ =	9,9762048	9,9838222
(l coſ. ϕ =	9,5080779	9,4280436
$l\,SQ$ =	4,9379891	4,9408379
$l\,\beta Q$ =	4,4698622	4,3850593
Ergo βQ =	29502,73	24269,41
ſubtr. $\alpha\beta$ =	3305,98	4426,15
addatur $\beta\gamma$ =	2924,70	3872,71
αQ =	26196,75	19843,26
γQ =	32427,43	28142,12
Nunc a $l\,QS$ =	4,9379891	4,9408379
ſubtr. ($l\,Q\alpha$ =	4,4182474	4,2976130
($l\,Q\gamma$ =	4,5109126	4,4493568
erit l tang. $S\alpha Q$ =	10,5197417	10,6432249
l tang. $S\gamma Q$ =	10,4270765	10,4914811
ergo ang. ($S\alpha Q$ =	73°,11′,11″	77°,11′,21″
($S\gamma Q$ =	69 ,29, 31	72 , 7 ,33

Jam

Jam a l S Q =	4,9379891	4,9408379
ſubtr. (l ſin SαQ =	9,9810257	9,9890524
(l ſin SγQ =	9,9715648	9,9785151
l S α =	4,9569634	4,9517855
l S γ =	4,9664243	4,9623228

§. XXXI.

Inventis Sα & Sγ quoniam perpendicula $a\alpha$, $c\gamma$ ſunt data, erit tang. $aS\alpha = \frac{a\alpha}{S\alpha}$ & tang. $cS\gamma = \frac{c\gamma}{S\gamma}$, ſicque prodeunt latitudines heliocentricæ $aS\alpha$ & $cS\gamma$: hincque reperiuntur ipſæ cometæ diſtantiæ a ſole Sa & Sc ex his formulis : $Sa = \frac{a\alpha}{\text{ſin. } aS\alpha}$ & $Sc = \frac{c\gamma}{\text{ſin. } cS\gamma}$.

A b l a α =	4,5486581	4,6007084
ſubtr. l S α =	4,9569634	4,9517855
l tang. a S α =	9,5916947	9,6489229
ergo a S α =	21°,20′,2″	21°, 1′,0″
a l a α =	4,5486581	4,6007084
ſubtr. l ſin a S α =	9,5608653	9,6095969
l S a =	4,9877928	4,9911115
& S a =	97228,33	97974,17
ſimili modo a l c γ =	4,6815639	4,7316086
ſubtr. l S γ =	4,9664243	4,9623228
l tang. c S γ =	9,7151396	9,7692858
& ang. c S γ =	27°,25′,40″	30°,27′, 1″
nunc a l c γ =	4,6815639	4,7316086
ſubtr. l ſin c S γ =	9,6633524	9,7048284
l S c =	5,0182115	5,0267802
& S c =	104282,54	106360,48

§. XXXII.

§. XXXII.

Inventis nunc duabus cometæ a ſole diſtantiis Sa & Sc, una cum corda ac definiri poterit tempus, quod ad hoc ſpatium abſolvendum cum in hypotheſi orbitæ cometæ parabolica, tum elliptica requiritur: ac primo quidem ſi orbita cometæ ſtatuatur parabola, poſitis $Sa = f$: $Sc = g$ & $ac = k$, erit tempus per $ac = \frac{\left(\frac{f+g+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{f+g-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3m}$ dierum, exiſtente $3m = 1153954,5$ & $l3m = 6,0621886$.

addantur $f = Sa =$	97228, 33	97974, 17
$g = Sc =$	104282, 54	106360, 48
$k = ac =$	14113, 58	16297, 89
erit $f+g+k =$	215624, 45	220632, 54
& $\frac{f+g+k}{2} =$	107812, 22	110316, 27
ſubtr. $k =$	14113, 58	16297, 89
erit $\frac{f+g-k}{2} =$	93693, 64	94018, 38
Nunc eſt $l\frac{f+g+k}{2} =$	5, 0326680	5, 0426396
addatur ſemiſſis =	2, 5163340	2, 5213198
erit $l\left(\frac{f+g+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} =$	7, 5490020	7, 5639594
ſubtrahatur $l3m =$	6, 0621886	6, 0621886
l Partis prioris	1, 4868134	1, 5017708
Porro $l\frac{f+g-k}{2} =$	4, 9717333	4, 9732128
add. ſemiſſis	2, 4858666	2, 4866064
$l\left(\frac{f+g-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} =$	7, 4575999	7, 4598192
ſubtr. $l3m$	6, 0621886	6, 0621886
l part. poſt. =	1, 3954113	1, 3976306

Ergo

Ergo pars prior .	30,67704	31,75198
pars poſterior $=$	24,85486	24,98219
Tempus per ac in diebus $=$	5,82218	6,70979

§. XXXIII.

Cum igitur tempus inter hæc cometæ loca præterlapſum ſit 6,30971 dierum, valor $B\beta = 9000$ tempus præbet nimis magnum, alterque valor $B\beta = 8000$ tempus præbet nimis parvum, ſi quidem orbita cometæ ponatur parabola: ex quibus perſpicuum eſt, verum ipſius $B\beta$ valorem intra limites 8000 & 9000 contineri.

Subtrahamus ergo a tempore majore 6,76979
tempus minus 5,82218

quia hoc temporis augmentum 0,94761
oritur ab incremento 1000, quod valori $B\beta = 8000$ eſt adjectum, videamus quantum incrementum ad eundem valorum $B\beta = 8000$ addi debeat, ut prodeat tempus obſervatum
6,30971, quod tempus ex hoc valore ortum
5,82218 ſuperat

0,48753 exceſſu: inſtituatur ergo iſta analogia

0,94761 : 1000 $=$ 0,48753 : 514

ex qua concluditur valor ipſius $B\beta$ fore circiter $8000 + 514 = 8514$. Hic autem valor tantum prope eſt verus, quia differentia inter valores 8000 & 9000 pro $B\beta$ aſſumtos nimis eſt magna, quam ut temporum incrementa incrementis ipſius $B\beta$ proportionalia ſtatui posſint. Propius vero ad valorem ipſius $B\beta$ pervenire poſſemus, ſi unum duosve valores medios pro $B\beta$ aſſumtos ſimili modo evolveremus.

§. XXXIV.

Videamus autem nunc cujusmodi tempora hi duo pro $B\beta$ aſſumti valores præbeant, ſi orbita cometæ ponatur ellipſis ſpecie data; ac ponamus eſſe ſemilatus rectum b ad diſtantiam perihelii a ſole a ut $2 - \frac{1}{50}$ ad 1, ita ut ſit $\alpha = \frac{1}{50}$. Ponatur cum dentur diſtantia $Sa = f$, $Sc = g$, & corda $ac = k$, hincque angulus $aSc = q$; anomalia vera loci $a = v$ ſitque $B = g \cos q - f$, & $C = \frac{g-f}{1-\alpha} = \frac{g-f}{49} \cdot 50$; eritque ſin. $\frac{1}{2} v = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{B}{2k})(\frac{1}{2} + \frac{C}{2k})} - \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{B}{2k})(\frac{1}{2} - \frac{C}{2k})}$, & invento angulo v orietur $a = \frac{f}{2-\alpha} + \frac{(1-\alpha) f \cos v}{2-\alpha} = \frac{50 f}{99} + \frac{49 f \cos v}{99}$ Ad angulum vero $q = aSc$ inveniendum, erit cos. $q = \frac{ff + gg - kk}{2fg}$ hincque $B = \frac{(g-k)\ (g+k)}{2f} - \frac{f}{2}$. ex quibus formulis tam angulus v, quam diſtantia a ſequenti modo eruentur.

Cum ſit $g =$	104282,54	106360,48
& $k =$	14113,58	16297,89
erit $g - k =$	90168,96	90062,59
& $g + k =$	118396,12	122658,37
& $\frac{g+k}{2} =$	59198,06	61329,18
Tum eſt $f =$	97228,33	97974,17
ſumatur $l\ \frac{g+k}{2} =$	4,7723074	4,7876672
add. $l(g-k) =$	4,9550570	4,9545444
	9,7273644	9,7422116
ſubtr. $l f =$	4,9877929	4,9911115
	4,7395715	4,7511001
ergo $\frac{(g-k)\ (g+k)}{2f} =$	54899,90	56376,76
ſubtr. $\frac{1}{2} f =$	48614,16	48987,08

erit

erit B =	6285,74	7389,68
at $2k$ =	28227,16	32595,78
A l B =	3,7983564	3,8686256
ſubtr. $l\,2k$ =	4,4506671	4,5131614
$l\ \frac{B}{2k}$ =	9,3476893	9,3554642
ergo $\frac{B}{2k}$ =	0,222684	0,226707
$\frac{1}{2}$ =	0,5	0,5
& $\frac{1}{2}+\frac{B}{2k}$ =	0,722684	0,726707
$\frac{1}{2}-\frac{B}{2k}$ =	0,277315	0,273292
Porro eſt g =	104282,54	106360,48
f =	97228,33	97974,17
$g-f$ =	7054,21	8386,31
& C $=\frac{50}{49}(g-f)$ =	7198,17	8557,46
l C =	3,8572221	3,9323448
ſubtr. $l\,2k$ =	4,4506671	4,5131614
$l\ \frac{C}{2k}$ =	9,4065550	9,4191834
$\frac{C}{2k}$ =	0,255008	0,262533
ergo $\frac{1}{2}+\frac{C}{2k}$ =	0,755008	0,762533
$\frac{1}{2}-\frac{C}{2k}$ =	0,244991	0,237466
add. $l\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2k}\right)$ =	9,8589484	9,8613594
add. $l\left(\frac{1}{2}+\frac{C}{2k}\right)$ =	9,8779516	9,8822586
	19,7369000	19,7436180
$l\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2k}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{C}{2k}\right)}$ =	9,8684500	9,8718090
ergo $\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2k}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{C}{2k}\right)}$ =	0,738669	0,744405

$l\,(\frac{1}{2}-\frac{B}{2k}) =$	9,4429733	9,4366269
$l\,(\frac{1}{2}-\frac{C}{2k}) =$	9,3891501	9,3756015
	18,8321234	18,8122282
$l\,\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{B}{2k})\,(\frac{1}{2}-\frac{C}{2k})} =$	9,4160617	9,4061141
ergo $\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{B}{2k})\,(\frac{1}{2}-\frac{C}{2k})} =$	0,260652	0,254750
a $\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{B}{2k})\,(\frac{1}{2}+\frac{C}{2k})} =$	0,738669	0,744405
ſin $\frac{1}{2}\,v =$	0,478017	0,489655
Hinc $\frac{1}{2}\,v =$	28°,33′,21″½	29°,19′,4½″
& $v =$	57°,6′,43″	58°,38′,9″
Deinde eſt $f =$	97228,33	97974,17
ergo $\frac{50}{99}\,f =$	49105,23	49481,91
& $\frac{49}{99}\,f =$	48123,12	48491,27
$l\;\frac{49}{99}\,f =$	4,6823538	4,6856635
add. l coſ. $v =$	9,7347993	9,7164005
	4,4171531	4,4020640
Ergo $\frac{49}{99}\,f$ coſ. $v =$	26130,82	25238,53
add. $\frac{50}{99}\,f =$	49105,23	49481,91
erit $a =$	75236,05	74720,44
& $l\,a =$	4,8764260	4,8734394
Deinde cum ſit B $=$	6285,74	7389,68
addatur $f =$	97228,33	97974,17
erit $B+f =$	103514,07	105363,85
A $l\,(B+f) =$	5,0149994	5,0226917
ſubtr. $l\,g =$	5,0182115	5,0267803
erit $l\,\frac{B+f}{g} = l$ coſ. $q =$	9,9967879	9,9959114
& $q = a\,S\,c =$	6 ,57′,36″	7°,50′,59″

§. XXXV.

§. XXXV.

Inventis anomaliis veris PSa, PSc cum diſtantia PS $=a$, commodiſſime tempus, quod ad arcum ac deſcribendum impenditur, reperietur, ſi ſeorſim tempora, quibus cometa a perihelio P ad loca a & c pervenit, quærantur, & minus a majore ſubtrahatur. Quodſi autem ponatur tangens $\frac{1}{2}$ PS$a = t$. erit tempus per P$a = \frac{a\sqrt{a}}{384651,5\sqrt{\frac{99}{100}}}(t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3.50}t^3 - \frac{1}{5.50}t^5 - \frac{1}{6.50.50}t^3 + \frac{1}{20.50.50}t^5)$ dierum, quæ eadem expreſſio dabit tempus per Pc, ſi loco t ſubſtituatur tangens $\frac{1}{2}$ PSc. Calculus ergo ſequenti modo inſtituetur, poſito brevitatis ergo $\frac{a\sqrt{a}}{384651,5\sqrt{\frac{99}{100}}} = N$ & $t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3.50}t^3 - \frac{1}{5.50}t^5 - \frac{1}{6.50.50}t^3 + \frac{1}{20.50.50}t^5 + \&c. = T$, ut ſit tempus $=$ NT. Tab. I. Fig. 2.

Cum ſit $l\ a$	$=$	4,8764260	4,8734394
add. $l\sqrt{a}$	$=$	2,4382130	2,4367197
erit $l\ a\sqrt{a}$	$=$	7,3146390	7,3101591
add. $l\sqrt{\frac{100}{99}}$	$=$	0,0021824	0,0021824
		7,3168214	7,3123415
ſubtr. l 384651, 5		5,5850673	5,5850673
l N	$=$	1,7317541	1,7272742
nunc eſt PSa	$=$	57°, 6′, 43″	58°, 38′, 9″
& $\frac{1}{2}$ PSa	$=$	28, 33, 21$\frac{1}{2}$	29, 19, 4$\frac{1}{2}$
ergo $l\ t$	$=$	9,7357755	9,7494155
$l\ t^3$	$=$	9,2073265	9,2482465
$l\ t^5$	$=$	8,6788775	8,7470775
hinc t	$=$	0,5442213	0,5615851
t^3	$=$	0,1611857	0,1771114
t^5	$=$	0,0477395	0,0558570

 add.

add. t =	0,5442213	0,5615851
$\frac{1}{3}$ t^3 =	0,0537286	0,0590371
	0,5979499	0,6206222
ſubtr. $\frac{1}{3.50}$ t^3 =	0,0010745	0,0011807
	0,5968754	0,6194415
ſubtr. $\frac{1}{5.50}$ t^5 =	0,0001909	0,0002234
	0,5966845	0,6192181
ſubtr. $\frac{1}{6.50.50}$ t^3 =	0,0000107	0,0000118
	0,5966738	0,6192063
add. $\frac{1}{20.50.50}$ t^5 =	9	11
erit T =	0,5966747	0,6192074
ergo lT =	9,7757375	9,7918361
add. lN =	1,7317541	1,7272742
	1,5074916	1,5191103
Tempus ab P ad a =	32,17300	33,04534 dies
Porro ad $\frac{1}{2}$ P S a =	28°,33′,21$\frac{1}{2}$″	29°,19′,4$\frac{1}{2}$″
add. $\frac{1}{2}$ a S c =	3 ,28 ,48	3 ,55 ,29$\frac{1}{2}$
erit $\frac{1}{2}$ PSc =	32°, 2′, 9″$\frac{1}{2}$	33°,14′,34″
erit ergo $l\,t$ =	9,7963958	9,8165018
$l\,t^3$ =	9,3891874	9,4495054
$l\,t^5$ =	8,9819790	9,0825090
hinc eſt t =	0,6257428	0,6553930
t^3 =	0,2450121	0,2815175
t^5 =	0,0959354	0,1209230
ad t =	0,6257428	0,6553930
add. $\frac{1}{3}$ t^3 =	0,0816374	0,0938392
	0,7073802	0,7492322
ſubtr. $\frac{1}{3.50}$ t^3 =	0,0016327	0,0018767
	0,7057475	0,7473555
ſubtr. $\frac{1}{5.50}$ t^5 =	3837	4837

ſubtr.

		0,7053638	0,7468718
ſubtr. $\frac{1}{6.50.50} t^3$	=	163	187
		0,7053475	0,7468531
ſubtr. $\frac{1}{20.50.50} t^5$	=	19	24
T	=	0,7053494	0,7468555
ergo *l* T	=	9,8484042	9,8732366
add. *l* N	=	1,7317541	1,7272742
		1,5801583	1,6005108
Tempus a P ad *c*	=	38,03280	39,85757
ſubtr. tempus a P ad a	=	32,17300	33,04534
Tempus ab *a* ad *c*		5,85980	6,81223

§. XXXVI.

Cum igitur tempus, quo cometa ex *a* in *c* perveniſſe eſt obſervatus ſit 6,30971 dierum, inter valores binos pro $B\beta$ aſſumtos ejus valor verus continebitur, eritque ideo major quam 8000 & minor quam 9000. Dum autem valor ipſius $B\beta$, qui poſitus erat 8000, millenario augebatur, tempus per ſpatium *a c* increvit diei parte 0,95243. Tempus autem ex hypotheſi $B\beta = 8000$ ortum deficit a tempore obſervato parte 0,44991; erit ergo proxime ut 95243 ad 1000 ita 44991 ad augmentum valori $B\beta = 8000$ addendum, ut ejus valor verus obtineatur; quare per regulam auream hoc augmentum erit = 472; ideoque $B\beta = 8472$. Qui valor autem pariter ac præcedens in hypotheſi parabolæ inventus tantum prope eſt verus, quoniam tempora per *a c* non in ratione valorum pro $B\beta$ aſſumtorum creſcunt, ſed in ratione majore, ex quo uterque valor verus pro $B\beta$ aliquanto minor erit, quam hoc tentamine craſ-

ſiore

ſiore eſt inventus. Quamobrem quo ad veritatem propius, & quidem tam prope, quam circumſtantiæ permittunt, accedamus, pro $B\beta$ iterum geminum valorem, alterum 8400, alterumque 8500 aſſumamus, & calculum pari modo inſtituamus.

§. XXXVII.

Sit igitur $B\beta$	=	8400,00	8500,00
ſubtr. Bm	=	5973,15	5973,15
erit βm	=	2426,85	2526,85
addatur mn	=	1378,85	1378,85
fiet βn	=	3805,70	3905,70
Tam ſumatur $l\beta n$	=	3,5804345	3,5916989
ſubtr. $l\beta m$	=	3,3850429	3,4025795
erit $l\,\frac{\beta n}{\beta m}$	=	0,1953916	0,1891194
add. $l\,\frac{m}{n}$	=	0,0532181	0,0532181
$l\,\frac{m.\ \beta n}{n.\ \beta m}$	=	0,2486097	0,2423375
add. l cot. AmB	=	9,9947234	9,9947234
erit $l\,\frac{m.\ \beta n}{n.\ \beta m}$ cot. AmB	=	0,2433331	0,2370609
Ergo $\frac{m.\ \beta n}{n.\ \beta m}$	=	1,772596	1,747179
Numerator		2,772596	2,747179
Porro $\frac{m.\ \beta n}{n.\ \beta m}$ cot. AmB	=	1,751190	1,726080
ſubtr. cot. BnC	=	0,889734	0,889734
Denominator		0,861456	0,836346
Ergo l Numerator.		10,4428865	10,4388870
l Denominat.		9,9352331	9,9223860

erit l tang. φ =	10,5076534	10,5165010
ideoque ang. $B\beta\gamma$ =	72°,44′,23″	73°, 4′,4″
Ergo ob $\alpha m \beta$ =	45 ,20,53	45 ,20,53
erit $A\alpha\beta$ =	27 ,23,30	27 ,43,11
& ob $\beta n \gamma$ =	48 ,20,22	48 ,20,22
& $C\gamma\beta$ =	58 ,55,15	58 ,35,34
Jam a l βm =	3,3850429	3,4025795
ſubtr. l ſin $A\alpha\beta$ =	9,6628245	9,6675900
	3,7222184	3,7349895
add. { l ſin $\alpha m \beta$ =	9,8521072	9,8521072
add. { l ſin φ =	9,9799883	9,9807530
l $\alpha\beta$ =	3,5743256	3,5870967
l αm =	3,7022067	3,7157425
Ergo $\alpha\beta$ =	3752,54	3864,53
αm =	5037,40	5196,88
add. Am =	8126,40	8126,40
erit $A\alpha$ =	13163,80	13323,28
Porro a l βn =	3,5804345	3,5916989
ſubtr. l ſin $C\gamma\beta$ =	9,9327044	9,9311959
	3,6477301	3,6605030
add. { l ſin. $\beta n \gamma$	9,8733764	9,8733764
add. { l ſin. φ	9,9799883	9,9807530
l $\beta\gamma$ =	3,5211065	3,5338794
l γn =	3,6277184	3,6412560
ergo $\beta\gamma$ =	3319,76	3418,84
γn =	4243,44	4377,70
add. Cn =	6840,66	6840,66
erit $C\gamma$ =	11084,10	11218,36
Ad l $A\alpha$ =	4,1193813	4,1246111
addatur l tang. lat.	10,4508513	10,4508513
l $a\alpha$ =	4,5702326	4,5754624
& $a\alpha$ =	37173,43	37623,79

Ad $l\,C\gamma$ =	4,0447004	4,0499285
addatur l tang. lat.	10,6584481	10,6584481
erit $l\,c\gamma$ =	4,7031485	4,7083766
& $c\gamma$ =	50483,38	51094,80
ſubtr. $a\alpha$ =	37173,43	37623,79
erit ck =	13309,95	13471,01
Porro eſt $\alpha\beta$ =	3752,54	3864,53
add. $\beta\gamma$ =	3319,76	3418,84
erit $\alpha\gamma = ak$ =	7072,30	7283,37
Nunc a $l\,ck$ =	4,1241765	4,1294001
ſubtr. $l\,ak$ =	3,8495607	3,8623324
l tang. cak =	10,2746158	10,2670677
& cak =	62°, 0′,58″	61°,36′,4″
Ab $l\,ck$ =	4,1241765	4,1294001
ſubtr. l ſin cak =	9,9459999	9,9443135
erit $l\,ac$ =	4,1781766	4,1850866
& ac =	15072,20	15313,93
BS =	99576,55	99576,55
ſubtr. Bβ =	8400,00	8500,00
erit Sβ =	91176,55	91076,55
& l Sβ =	4,9598831	4,9594065
add. l ſin Φ =	9,9799883	9,9807530
add. l coſ. Φ =	9,4723364	9,4642513
erit l SQ =	4,9398714	4,9401595
$l\,\beta$Q =	4,4322195	4,4236578
ergo βQ =	27053,26	26525,15
ſubtr. $\alpha\beta$ =	3752,54	3864,53
add. $\beta\gamma$ =	3319,76	3418,84
erit αQ =	23300,72	22660,62
γQ =	30373,02	29943,99

Nunc

Nunc a *l* Q S =	4,9398714	4,9401595
ſubtr. (*l* Q α =	4,3673694	4,3552719
(*l* Q γ =	4,4824880	4,4763098
erit *l* tang. Q α S =	10,5725020	10,5848876
l tang. Q γ S =	10,4573834	10,4638497
Ergo ang. Q α S =	75°, 1′, 6″	75°,25′,16″
Q γ S =	70°,46′,11″	71°, 2′, 0″
Jam a *l* Q S =	4,9398714	4,9401595
ſubtr. (*l* ſin Q α S =	9,9849810	9,9857864
(*l* ſin Q γ S =	9,9750650	9,9757570
erit *l* S α =	4,9548904	4,9543731
l S γ =	4,9648064	4,9644025
A *l* *a* α =	4,5702326	4,5754624
ſubtr. *l* S α =	4,9548904	4,9543731
l tang. *a* S α =	9,6153422	9,6210893
ergo *a* S α =	22°,24′,45″	22°,40′,51″
a *l* *a* α =	4,5702326	4,5754624
ſubtr. *l* ſin *a* S α =	9,5812350	9,5861341
l S *a* =	4,9889976	4,9893283
ergo S *a* =	97498,42	97572,70
Porro *a* *l* *c* γ =	4,7031485	4,7083766
ſubtr. *l* S γ =	4,9648064	4,9644025
l tang. *c* S γ =	9,7383421	9,7439741
ergo *c* S γ =	28°,41′,54″	29°, 0′,45″
Nunc a *l* *c* γ =	4,7031485	4,7083766
ſubtr. *l* ſin *c* S γ =	9,6814203	9,6857422
l S *c* =	5,0217282	5,0226344
& S *c* =	105130,37	105349,97

§. XXXVIII.

Sit nunc primum orbita parabola, & quæratur tempus quod ad arcum ac percurrendum abſolvitur, uti § 32 eſt factum.

add. $f = Sa =$	97498,42	97572,70
add. $g = Sc =$	105130,37	105349,97
add. $k = ac =$	15072,20	15313,93
erit $f + g + k =$	217700,99	218236,60
& $\frac{f+g+k}{2} =$	108850,50	109118,30
ſubtr. $k =$	15072,20	15313,93
erit $\frac{f+g-k}{2} =$	93778,30	93804,37
Ad $l\frac{f+g+k}{2} =$	5,0368304	5,0378976
add. ſemiſſis $=$	2,5184152	2,5189488
	7,5552456	7,5568464
ſubtr. $l\,3\,m$	6,0621886	6,0621886
l part. prioris	1,4930570	1,4946578
Porro $l\frac{f+g-k}{2} =$	4,9721024	4,9722231
add. ſemiſſis $=$	2,4860512	2,4861116
	7,4581536	7,4583347
ſubtr. $l\,3\,m$	6,0621886	6,0621886
l part. poſterior. $=$	1,3959650	1,3961461
Ergo pars prior $=$	31,12125	31,23617
ſubtr. pars poſter. $=$	24,88657	24,89695
Tempus per ac in $d.$	6,23468	6,33922

Cum igitur tempus obſervatum ſit 6,30971. d. verus valor ipſius $B\beta$ manifeſto intra limites 8400 & 8500 continetur, & quia in tam parvo intervallo incrementa temporum

rum ſunt proxime uti incrementa ipſius $B\beta$; ſumamus differentias:

$$\begin{array}{lcl} 6,33922 & & 6,30971 \\ \underline{6,23468} & & \underline{6,23468} \\ 0,10454 : 100 & = & 0,07503 : 71,77 \end{array}$$

erit ergo valor proxime verus ipſius $B\beta = 8471$; qui autem ex præcedentibus hypotheſibus exactius determinabitur interpolationibus in ſubſidium vocatis:

$B\beta = 8000 +$	0 ,	400 ,	500 ,	1000	
tempus per $ac =$	5,82218,	6,23468;	6,33922;	6,76979	
diff. I.		103, 10	104, 54	86, 11	
diff. II.			$\frac{1,44}{500}$	$-\frac{18,43}{600}$	
diff. III.				$-\frac{100,79}{3000000}$	

Si jam ponatur $B\beta = 8000 + x$, erit tempus per $ac = 5,82218$
$+ x.\ 103,10 + x(x-400)\frac{1,44}{500} - x(x-400)(x-500)\frac{100,79}{3000000}$

Hinc ſi ſumatur $x = 470$, fit tempus per $ac = 6,30803$

ſin ſumatur $x = 471$, fit tempus per $ac = 6,30907$

ſi ſumatur $x = 472$, fit tempus per $ac = 6,31012$

fiat ergo ut $105 : 1 = 64 : 0,61$, ex quo verus valor ipſius $B\beta$ colligitur fore $= 8471,61$, qui non multum diſcrepat ab eo, quem duo valores poſteriores ſoli ſuppeditaverunt.

§. XXXIX.

Nunc in altera hypotheſi, qua orbita cometæ ſtatuitur ellipſis, in qua ſemilatus rectum eſt ad diſtantiam perihelii a ſole ut $2-\alpha$ ad 1, denotante $\alpha = \frac{1}{30}$, quæratur tempus ad ſpatium ac percurendum requiſitum modo §. 34. expoſito, ſeu adhibeatur hæc formula: $\sin \frac{1}{2} v = \frac{\sqrt{(k+B)(k+C)} - \sqrt{(k-B)(k-C)}}{2k}$)

 Cum

Cum ſit $g =$	105130,37	105349,97
& $k =$	15072,20	15313,93
erit $g - k =$	90058,17	90036,04
& $g + k =$	120202,57	120663,90
& $\frac{g + k}{2} =$	60101,26	60331,95
tum vero eſt $f =$	97498,42	97572,70
ad $l\,\frac{g+k}{2} =$	4,7788835	4,7805474
addatur $l\,(g - k) =$	4,9545231	4,9544164
	9,7334066	9,7349638
ſubtr. $l\,f =$	4,9889976	4,9893283
	4,7444090	4,7456355
ergo $\frac{(g-k)(g+k)}{2f} =$	55514,84	55671,84
ſubtr. $\frac{1}{2} f =$	48749,21	48786,35
erit B $=$	6765,63	6885,49
ob $k =$	15072,20	15313,93
erit $k +$ B $=$	21837,83	22199,42
$k -$ B $=$	8306,57	8428,44
Porro ab $g =$	105130,37	105349,97
ſubtr. $f =$	97498,42	97572,70
$g - f =$	7631,95	7777,27
& C $= \frac{50}{49}(g-f) =$	7787,70	7935,99
$k =$	15072,20	15313,93
erit $k +$ C $=$	22859,90	23249,92
$k -$ C $=$	7284,50	7377,94
add. $l\,(k+B) =$	4,3392095	4,3463416
add. $l\,(k+C) =$	4,3590743	4,3664215
	8,6982838	8,7127631
	4,3491419	4,3563815
ſubtr. $l\,2\,k =$	4,4792067	4,4861167
	9,8699352	9,8702648

Ergo

Ergo $= \frac{\sqrt{(k+B)\ (k+C)}}{2k} =$	0,741199	0,741762
add. $l\ (k-B) =$	3,9194217	3,9257472
$l\ (k-C) =$	3,8623997	3,8679352
	7,7818214	7,7936824
	3,8909107	3,8968412
ſubtr. $l\ 2k =$	4,4792067	4,4861167
	9,4117040	9,4107245
ergo $\frac{\sqrt{(k-B)\ (k-C)}}{2k} =$	0,258050	0,257468
a $\frac{\sqrt{(k+B)\ (k+C)}}{2k} =$	0,741199	0,741762
ſin $\frac{1}{2}v =$	0,483149	0,484294
Hinc $\frac{1}{2}v =$	28°,53′,28½″	28°,57′,58½″
& $v =$	57 ,46 ,57	57 ,55 ,57
Quia eſt $f =$	97498,42	97572,70
erit $\frac{50}{99}f =$	49241,63	49279,14
$\frac{49}{99}f =$	48256,80	48293,56
$l\ \frac{49}{99}f =$	4,6835585	4,6838892
add. l coſ. $v =$	9,7268369	9,7250275
	4,4103954	4,4089167
ergo $\frac{49}{99}f$ coſ. $v =$	25727,38	25639,92
$\frac{50}{99}f =$	49241,63	49279,14
erit $a =$	74969,01	74919,06
& $l\ a =$	4,8748818	4,8745924
Cum ſit B $=$	6765,63	6885,49
addatur $f =$	97498,42	97572,70
erit $B + f =$	104264,05	104458,19
$l\ (B+f) =$	5,0181345	5,0189425
ſubtr. $l\ g =$	5,0217282	5,0226344

l B+f

$l\,\frac{B+f}{g} = l$ coſ. q =	9,9964063	9,9963081
Ergo q = aSc =	7°,21′,39″	7°,27′,37″
Ad $l\,a$ =	4,8748818	4,8745924
add. $l\,\sqrt{a}$ =	2,4374409	2,4372962
$l\,a\sqrt{a}$ =	7,3123227	7,3118886
add. $l\,\sqrt{\frac{100}{99}}$ =	0,0021824	0,0021824
	7,3145051	7,3140710
ſubtrahatur	5,5850673	5,5850673
l N =	1,7294378	1,7290037
Nunc eſt $\frac{1}{2}$ PSa =	28°,53′,28½″	28°,57′,58½″
Ergo $l\,t$ =	9,7418057	9,7431584
$l\,t^3$ =	9,2254171	9,2294752
$l\,t^5$ =	8,7090285	8,7157920
Hinc t =	0,551830	0,553549
t^3 =	0,168041	0,169619
t^5 =	0,051171	0,051975
Ad t =	0,551830	0,553549
add. $\frac{1}{3}\,t^3$ =	0,056014	0,056539
	0,607844	0,610089
ſubtr. $\frac{1}{3.50}\,t^3$ =	0,001120	0,001131
	0,606724	0,608958
ſubtr. $\frac{1}{5.50}\,t^5$ =	204	208
	0,606520	0,608750
ſubtr. $\frac{1}{6.50.50}\,t^3$ =	11	11
	0,606509	0,608739
add. $\frac{1}{20.50.50}\,t^5$ =	1	1
T =	0,606510	0,608740
ergo l T =	9,7828380	9,7844318
add. l N =	1,7294378	1,7290037

Tempus

	1,5122758	1,5134355
Tempus a P ad a =	32,52938	32,61636
Ad $\frac{1}{2}$ PSa	28°,53′,28½″	28°,57′,58½″
add. $\frac{1}{2}$ aSc =	3 ,40 ,49½	3 ,43 ,48½
erit $\frac{1}{2}$ PSc =	32 , 34, 18	32 , 41, 47
Ergo $l\,t$ =	9,8053854	9,8074672
$l\,t^3$ =	9,4161562	9,4224016
$l\,t^5$ =	9,0269270	9,0373360
hinc t =	0,6388302	0,6418997
t^3 =	0,2607091	0,2644854
t^5 =	0,1063964	0,1089772
Ad t =	0,6388302	0,6418997
add. $\frac{1}{3}$ t^3 =	0,0869030	0,0881618
	0,7257332	0,7300615
ſubtr. $\frac{1}{3.50}$ t^3 =	0,0017380	0,0017632
	0,7239952	0,7282983
ſubtr. $\frac{1}{5.50}$ t^5 =	4256	4359
	0,7235696	0,7278624
ſubtr. $\frac{1}{6.50.50}$ t^3 =	174	176
	0,7235522	0,7278448
add. $\frac{1}{20.50.50}$ t^5 =	21	21
T =	0,7235543	0,7278469
l T =	9,8594711	9,8620400
add. l N =	1,7294378	1,7290037
	1,5889089	1,5910437
Tempus a P ad c =	38,80689	38,99813
Tempus a P ad a =	32,52938	32,61636
Tempus ab a ad c =	6,27751	6,38177

§. XL.

Horum duorum temporum itaque alterum majus eſt, alterum minus, quam obſervatum 6, 30971 dierum, & ſumtis differentiis hinc concluditur verum valorem rectæ $B\beta$ eſſe 8430,88. Quo autem hunc valorem accuratius inveniamus, interpolationem ex omnibus quatuor pertractatis valoribus pro $B\beta$ aſſumtis concludamus. Cum igitur poſito

$B\beta$ =	8000 +	0	+ 400	+ 500 +	1000
ſit temp. per ac =		5,85980;	6,27751,	6,38177;	6,81223
Diff. I.		104,43,	104,26;	86,09	
Diff. II.		− 0,00034;	− 0,03030		
Diff. III.			− 0,00002996		

unde colligitur, ſi capiatur $B\beta = 8000 + x$, fore tempus per $ac = 5,85980 + x$, $104,43 - x\ (x - 400)$ $\cdot 0,00034 - x\cdot(x - 400)\ (x - 500)$, $0,00002996$

ſi ergo ſit $B\beta = 8430,00$, erit tempus per $ac = 6,30882$, ſin autem $B\beta = 8431,00$, erit tempus per $ac = 6,30986$ Ergo fiat $104 : 1 = 89 : 0,85$, ideoque habebitur $B\beta = 8430,85$, qui eſt verus valor ipſius $B\beta$, in hypotheſi orbitæ ellipticæ, cujus ſemilatus rectum eſt ad diſtantiam perihelii a ſole ut $2 - \frac{1}{50}$ ad 1 ſeu ut 99 ad 50.

§. XLI.

Inventis ergo pro utraque hypotheſi veris ipſius $B\beta$ valoribus, ipſam cometæ orbitam definiamus ita, ut inde ad datum quodvis tempus locus cometæ computari poſſit.

	Pro Parabola	Pro ellipſi.
Eſt ergo $B\beta$ =	8471,61	8430,85
ſubtr. Bm =	5973,15	5973,15
erit βm =	2498,46	2457,70
addatur mn =	1378,85	1378,85
& βn =	3877,31	3436,55
Tum ab BS =	99576,55	99576,55
ſubtr. $B\beta$ =	8471,61	8430,85
erit $S\beta$ =	91104,94	91145,70
Jam *a* $l\beta n$ =	3,5885305	3,5839408
ſubtr. $l\beta m$ =	3,3976724	3,3905289
$l\,\frac{\beta n}{\beta m}$ =	0,1908581	0,1934119
add. $l\,\frac{m}{n}$ =	0,0532181	0,0532181
	0,2440762	0,2466300
add. l cot. AmB =	9,9947234	9,9947234
	0,2387996	0,2413534
Ergo $\frac{m.\beta n}{n.\beta m}$ =	1,754189	1,764534
& numerator	2,754189	2,764534
$\frac{m.\beta n}{n.\beta m}$ cot. AmB =	1,733004	1,743125
ſubtr. cot. BnC =	0,889734	0,889734
denominator	0,843270	0,853391
Ergo l numerator.	10,4399937	10,4416219
l denominat.	9,9259667	9,9311480
l tang. Φ =	10,5140270	10,5104739
Ergo $B\beta\gamma = \Phi$ =	72°,58′,36″	72°,50′,42″
$\alpha m\beta$ =	45 ,20 ,53	45 ,20 ,53
$A\alpha\beta$ =	27 ,37 ,43	27 ,29 ,49
$\beta n\gamma$ =	48 ,20 ,22	48 ,20 ,22
$C\gamma\beta$ =	58 ,41 , 2	58 ,48 ,56

Jam

Jam a $l\ \beta\ m$ =	3,3976724	3,3905289
ſubtr. l ſin A $\alpha\ \beta$ =	9,6662730	9,6643612
	3,7313994	3,7261677
add. { l ſin $\alpha\ m\ \beta$ =	9,8521072	9,8521072
add. { l ſin Φ =	9,9805422	9,9802354
$l\ \alpha\ \beta$ =	3,5835066	3,5782749
$l\ \alpha\ m$ =	3,7119416	3,7064031
ergo $\alpha\ \beta$ =	3832,71	3786,82
$\alpha\ m$ =	5151,59	5086,31
add. A m =	8126,40	8126,40
ergo A α =	13277,99	13212,71
Porro a $l\ \beta\ n$ =	3,5885305	3,5839408
ſubtr. l ſin C $\gamma\ \beta$ =	9,9316168	9,9322225
	3,6569137	3,6517183
add. { l ſin $\beta\ n\ \gamma$ =	9,8733764	9,8733764
add. { l ſin Φ =	9,9805422	9,9802354
$l\ \beta\ \gamma$ =	3,5302901	3,5250947
$l\ \gamma\ n$ =	3,6374559	3,6319537
$\beta\ \gamma$ =	3390,70	3350,38
$\gamma\ n$ =	4339,66	4285,03
add. C n =	6840,66	6840,66
erit C γ =	11180,32	11125,63

§. XLII.

His inventis erit ut ſupra vidimus $a\alpha = A\alpha$ tang. latitudinis, & $c\gamma = C\gamma$ tang. latitud. atque hinc reperietur diſtantia cometæ a terra vera tempore primæ & ultimæ obſervationis: nempe $Aa = \frac{a\,\alpha}{ſin.\,latit.}$ & $Cc = \frac{c\,\gamma}{ſin.\,latit.}$. Tum vero ut ante longitudo cordæ ac definietur.

Erit

Erit nempe *l* A α =	4,1231325	4,1209919
add. *l* tang. lat. =	10,4508513	10,4508513
l a α =	4,5739838	4,5718432
ſubtr. *l* ſin. lat. =	9,9743466	9,9743466
l A α =	4,5996372	4,5974966
I. Obſ. diſt. Cometæ a Terra =	39777,5	39581,9
Porro *l* C γ =	4,0484543	4,0463246
add. *l* tang. lat.	10,6584481	10,6584481
l c γ =	4,7069024	4,7047727
ſubtr. *l* ſin lat. =	9,9897766	9,9897766
l C *c* =	4,7171258	4,7149961
III. Obſer. diſt. Cometæ a terra =	52134,6	51889,5
Deinde eſt *c* γ =	50921,66	50672,55
ſubtr. *a* α =	37495,90	37311,54
erit *c k* =	13425,76	13361,01
ad α β =	3832,71	3786,82
add. β γ =	3390,70	3350,38
α γ = *a k* =	7223,41	7137,20
A *l c k* =	4,1279289	4,1258393
ſubtr. *l a k* =	3,8587423	3,8535279
l tang. *c a k* =	10,2691866	10,2723114
& ang. *c a k* =	61°,43′, 5″	61°,53′,23″
jam a *l c k* =	4,1279289	4,1258393
ſubtr. *l* ſin. *c a k* =	9,9447918	9,9454895
l a c =	4,1831371	4,1803498
& *a c* =	15245,34	15147,80

§. XLIII.

Si jam corda *a c* producatur, donec rectæ γ α continuatæ occurrat in N, erit N punctum in orbita cometæ ſimulque in ecliptica; quare ſi ducatur recta S N, erit hæc S N

 linea

linea nodorum. Cum autem ſit ang. $a N \alpha = c a k$, fiet $\frac{a \alpha}{N \alpha} =$ tang. $c a k$ ideoque $\alpha N = \frac{a \alpha}{tang.\, c a k}$. Demiſſa autem ex S in $\alpha \gamma$ productam normali SQ, recta $S\alpha$, & $S\gamma$ definientur ut ante, & ob angulos $BS\alpha$, $BS\gamma$ datos obtinebitur longitudo cometæ heliocentrica in prima & tertia obſervatione.

a $l\, a \alpha =$	4,5739838	4,5718432
ſubtr. l tang. $c a k =$	10,2691866	10,2723114
$l\, \alpha N =$	4,3047972	4,2995318
Ergo $\alpha N =$	20174,24	19931,12
Ad $l\, S \beta =$	4,9595419	4,9597361
add. { l ſin $\Phi =$	9,9805422	9,9802354
add. { l coſ. $\Phi =$	9,4665134	9,4697598
$l\, S Q =$	4,9400841	4,9399715
$l\, \beta Q =$	4,4250553	4,4294959
Ergo $\beta Q =$	26610,64	26884,13
ſubtr. $\alpha \beta =$	3832,71	3786,82
add. $\beta \gamma =$	3390,70	3350,38
Ergo $\alpha Q =$	22777,93	23097,31
$\gamma Q =$	30001,34	30234,51
A $l\, S Q =$	4,9400841	4,9399715
ſubtr. { $l\, \alpha Q =$	4,3575143	4,3635614
ſubtr. { $l\, \gamma Q =$	4,4771406	4,4805029
l tang. $S \alpha Q =$	10,5825698	10,5764101
l tang. $S \gamma Q =$	10,4629435	10,4594686
Ergo $S \alpha Q =$	75°,20',48''	75°, 8',47''
$S \gamma Q =$	70 ,59 , 48	70 ,51 , 18
A $l\, S Q =$	4,9400441	4,9399715
ſubtr. { l ſin. $S \alpha Q =$	9,9856394	9,9852396
ſubtr. { l ſin. $S \gamma Q =$	9,9756614	9,9752901

erit

erit $l\,S\,\alpha$ =	4,9544447	4,9547319
$l\,S\,\gamma$ =	4,9644227	4,9646814
A $Q\,\alpha\,S$ =	75°,20′,48″	75°, 8′,47″
ſubtr. $Q\,\beta\,S$ =	72 ,58,36	72 ,50,42
addatur $\alpha\,S\,\beta$ =	2°,22′,12″	2°,18′, 5″
ad longit. B =	5ſ,24°,24′,26″	5ſ,24°,24′,26″
I. Obſ. Longitudo Com. heliocentr.	5ſ,26 ,46′,38	5ſ,26°,42′,31″
A $Q\,\beta\,S$ =	72°,58′,36″	72°,50′,42″
ſubtr. $Q\,\gamma\,S$ =	70 ,59,48	70 ,51,18
$\beta\,S\,\gamma$ =	1°,58′,48″	1°,59′,26″
α long. B =	5ſ,24°,24′,26″	5ſ,24°,24′,26″
III. Obſ. Longit. Com. heliocentr.	5ſ,22°,25′,38″	5ſ,22°,25′, 0″
Porro a $l\,a\,\alpha$ =	4,5739838	4,5718432
ſubtr. $l\,S\,\alpha$ =	4,9544447	4,9547319
l tang. $a\,S\,\alpha$ =	9,6195391	9,6171113
I. Obſ. latitudo Com. helioc. $aS\alpha$ =	22°,36′,29″	22°,29′,41″
$a\,l\,a\,\alpha$ =	4,5739838	4,5718432
ſubtr. l ſin $a\,S\,\alpha$ =	9,5848118	9,5827431
$l\,S\,a$ =	4,9891720	4,9891001
I. Obſ. Diſt. Com. a Sole $S\,a$ =	97537,59	97521,45
Jam a $l\,c\,\gamma$ =	4,7069024	4,7047727
ſubtr. $l\,S\,\gamma$ =	4,9644227	4,9646814
l tang. $c\,S\,\gamma$ =	9,7424797	9,7400913
III. Obſ. Lat. Com. heliocent. $cS\gamma$ =	28°,55′,44″	28°,47′,44″
a $l\,c\,\gamma$ =	4,7069024	4,7047727
ſubtr. l ſin. $c\,S\,\gamma$ =	9,6845973	9,6827639
$l\,S\,c$ =	5,0223051	5,0220088
III. Obſ. diſt. Com. a Sole $S\,c$ =	105270,13	105198,32

§. XLIV.

Inventis his lineis erit $QN = \alpha Q - \alpha N$. Hinc erit tang $QSN = \frac{QN}{QS}$; ergo $\beta SN = \beta SQ - QSN =$

90° —

$90^\circ - \phi - QSN$, ſicque innoteſcit poſitio lineæ nodorum SN, atque longitudo nodi aſcendentis N heliocentrica. Tum in SN productam ex α demittatur perpendicularis αR, erit $\alpha R = S\alpha \sin \alpha SR$, eſtque $\alpha SR = 90^\circ - Q\alpha S - QSN$, & $SR = S\alpha \cos. \alpha SR$; hincque ducta aR, quæ erit normalis ad SR reperietur tang. $aR\alpha = \frac{a\alpha}{\alpha R}$; eritque ang. $aR\alpha$ = inclinationi orbitæ cometæ ad eclipticam. Tum vero eſt $aR = \frac{a\alpha}{\sin.\ aR\alpha}$ & ſin. $aSN = \frac{aR}{Sa}$. eritque ang. aSN diſtantia cometæ heliocentrica a nodo tempore primæ obſervationis. Denique angulus aSc hinc reperietur, quod ſit coſ. $aSc = \frac{Sa^2 + Sc^2 - ac^2}{2\,Sa.\ Sc}$, hincque coſ. $\frac{1}{2}\ aSc = \sqrt{\left(\frac{Sa + Sc + ac}{2\,Sa}\right)\left(\frac{Sa + Sc - ac}{2\,Sc}\right)}$.

Ab αQ =	22777,93	23097,31
ſubtr. αN =	20174,24	19931,12
erit QN =	2603,69	3166,19
a $l\,QN$ =	3,4155893	3,5005369
ſubtr. $l\,QS$ =	4,9400841	4,9399715
l tang. QSN =	8,4755052	8,5605654
QSN =	1°,42′,43″	2° 4′,55″
add. ϕ =	72,58, 36	72,50, 42
	74,41, 19	74,55,37
Ergo βSN =	15°,18′,41″	15°, 4′, 23″
add. long. B =	5ſ,24°,24′,26″	5ſ,24°,24′,26″
Longitudo nodi aſcend.	6ſ,9°,43′, 7″	6ſ,9°,28′,49″
ad QSN addatur $Q\alpha S$ =	75°,20′,48″	75°, 8′, 47″
	77°, 3′, 31	77°,.13′, 42″
erit αSR =	12°,56′,29″	12°, 46′, 18″

ad

ad l S. α =	4,9544447	4,9547319
add. l ſin. α S R =	9,3501591	9,3445224
l α R =	4,3046038	4,2992543
a l a α =	4,5739838	4,5718432
l tang. a R α =	10,2693800	10,2725889
Inclinatio ad eclipt. a R α =	61°,43′,44″	61°,54′,18″
Ab l a α =	4,5739838	4,5718432
ſubtr. l ſin. a R α =	9,9448360	9,9455513
l a R =	4,6291478	4,6262919
ſubtr. l S a =	4,9891720	4,9891001
l ſin a S N =	9,6399758	9,6371918
I. Obſ. diſt. com. hel. a nod. aSN =	25°,52′,49″	25°,42′,10″
S a =	97537,59	97521,45
S c =	105270,13	105198,32
a c =	15245,34	15147,80
	218053,06	217867,57
$\frac{Sa + Sc + ac}{2}$ =	109026,53	108933,78
$\frac{Sa + Sc - ac}{2}$ =	93781,19	93785,98
ad l $\frac{Sa + Sc + ac}{2}$ =	5,0375321	5,0371625
add. l $\frac{Sa + Sc - ac}{2}$ =	4,9721158	4,9721379
	10,0096479	10,0093004
ſubtr. l S a =	4,9891720	4,9891001
	5,0204759	5,0202003
ſubtr. l S c =	5,0223051	5,0220088
	9,9981708	9,9981915
l coſ. ½ aSc =	9,9990854	9,9990957
Ergo ½ a S c =	3°,43′,1½″	3°,41′,46½″
& a S c =	7°,26′,3″	7°,23′,33″
III. Obſ. diſt. C. hel. a nod. cSN =	33°,18′,52″	33°,5′,43″

§. XLV.

Fig. 2. Inventis nunc duabus cometæ a ſole diſtantiis $Sa = f$; $Sc = g$, cum corda $ac = k$ ſeu angulo $aSc = q$, orbita cometæ tam parabolica quam elliptica definiri poterit. Poſito enim angulo $PSa = v$, ſi fiat $B = g \text{ coſ. } q - f$ & $C = \frac{g-f}{1-\alpha}$, erit $\text{ſin } \frac{1}{2} v = \frac{\sqrt{(k+B)(k+C)} - \sqrt{(k-B)(k-C)}}{2k}$; ubi pro parabola eſt $\alpha = 0$, & pro ellipſi eſt $\alpha = \frac{1}{30}$. Tum invento angulo v erit $PS = a = \frac{f}{2-\alpha} + \frac{f(1-\alpha)}{2-\alpha} \text{ coſ. } v$.

$l\, Sc = l\, g =$	5,0223051	5,0220088
add. l coſ. $aSc = l$ coſ. $q =$	9,9963340	9,9963751
$l\, g$ coſ. $q =$	5,0186391	5,0183839
ergo g coſ. $q =$	104385,25	104323,92
ſubtr. $Sa = f =$	97537,59	97521,45
erit $B =$	6847,66	6802,47
$ac = k =$	15245,34	15147,80
$k + B$	22093,00	21950,27
$k - B$	8397,68	8345,33
Ab $g =$	105270,13	105198,32
ſubtr. $f =$	97537,59	97521,45
$g - f =$	7732,54	7676,87
erit $C =$	7732,54	7833,54
$k =$	15245,34	15147,80
$k + C =$	22977,88	22981,34
$k - C =$	7512,80	7314,26
Ad $l\,(k + B) =$	4,3442547	4,3414399
add. $l\,(k+C) =$	4,3613099	4,3613754
	8,7055646	8,7028153

lV

$l\sqrt{(k+B)(k+C)} =$	4,3527823	4,3514077
ſubtr. $l\,2k =$	4,4841671	4,4813798
l part. prioris	9,8686152	9,8700279
Ad $l\,(k-B) =$	3,9241593	3,9214436
add. $l\,(k-C) =$	3,8758018	3,8641704
	7,7999611	7,7856140
$l\sqrt{(k-B)(k-C)} =$	3,8999806	3,8928070
ſubtr. $l\,2\,k =$	4,4841671	4,4813798
l part. poſt. $=$	9,4158135	9,4114272
Pars prior $=$	0,738950	0,741358
ſubtr. pars poſt. $=$	0,260503	0,257886
ſin $\frac{1}{2}\,v =$	0,478447	0,483472
Ergo $\frac{1}{2}\,v =$	28°,35′,2½″	28°,54′,44½″
& aSP$=v=$	57°,10′, 5″	57°,49′,29″
ſubtr. a S N $=$	25°,52,49	25 ,42,10
Diſt. perihelii a nodo $=$	31°,17′,16″	32°, 7′,19″
Cum ſit $f =$	97537,59	97521,45
erit $\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\,f =$	48768,79	48358,19
Ad $l\,\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\,f =$	4,6881420	4,6844700
add. l coſ. $v =$	9,7341409	9,7263287
	4,4222829	4,4107987
Ergo $\frac{(1-\alpha)f}{2-\alpha}$ coſ.$v =$	26441,31	25751,27
add. $\frac{f}{2-\alpha}$ $=$	48768,79	49253,26
Ergo PS $= a =$	75210,10	75004,53
& $l\,a =$	4,8762762	4,8750875

§. XLVI.

Inventa orbita cometæ ſupereſt, ut tempus, quo cometa per perihelium tranſiit, definiamus, quod reperietur, ſi tempus determinemus, quo cometa a perihelio P ad locum a appulerit: Ponatur tang. $\frac{1}{2}$ a S P $=$ tang. $\frac{1}{2}$ $v = t$, eritque tempus, quo cometa ex P ad a pervenit, in diebus expreſſum

$$= \frac{a\sqrt{a}}{384651,5\ \sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha)}}\ (t + \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{\alpha}{3}t^3 - \tfrac{\alpha}{5}t^5 - \tfrac{\alpha\alpha}{6}t^3 + \tfrac{\alpha\alpha}{20}t^5)$$

ſit vero $\frac{a\sqrt{a}}{384651,5\ \sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha)}} = N$, & $T = t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{\alpha}{3}t^3 - \frac{\alpha}{5}t^5 - \frac{\alpha\alpha}{6}t^3 + \frac{\alpha\alpha}{20}t^5)$ ut ſit tempus per Pa $=$ N T.

Ad $l\,a =$	4,8762762	4,8750875
add. $l\sqrt{a} =$	2,4381381	2,4375437
$l\,a\sqrt{a} =$	7,3144143	7,3126312
add. $l\,\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha)}} =$	0,0000000	0,0021824
	7,3144143	7,3148136
ſubtr.	5,5850673	5,5850673
$l\,N =$	1,7293470	1,7297463
Jam eſt $l\,t =$	9,7362818	9,7421838
$l\,t^3 =$	9,2088454	9,2265514
$l\,t^5 =$	— — —	8,7109190
$t =$	0,544856	0,552311
$t^3 =$	0,161750	0,168481
$t^5 =$	— — —	0,051394
Ad $t =$	0,544856	0,552311
add. $\frac{1}{3}t^3 =$	0,053917	0,056160
	0,598773	0,608471
ſubtr. $\frac{\alpha}{3}\ t^3 =$	— — —	1123

ſubtr.

	– –	0,607348
ſubtr. $\frac{\alpha}{5} t^5$ =	– –	205
	– –	0,607143
ſubtr. $\frac{\alpha\alpha}{6} t^3$ =	– –	11
erit T =	0,598773	0,607133
add. *l* T =	9,7772622	9,7832838
add. *l* N =	1,7293470	1,7297463
	1,5066092	1,5130301
Tempus a perihelio ad *a* =	32,10771	32,58593
Cometa ergo a perihelio ad locum *a* pervenit – –	$32^d, 2^h, 35'$	$32^d, 14^h, 3'$
At cometa in *a* eſt verſatus Jan.	$59^d, 6, 49$	$59^d, 6^h, 49'$
Cometa in perihelio fuit M. Jan.	$27^d, 4^h, 14'$	$26^d, 16^h, 45'$

§. XLVII.

Invenimus ergo pro orbita cometæ duplicem figuram, alteram parabolam, alteram ellipſin, cujus ſemilatus rectum eſt ad diſtantiam perihelii a ſole ut 99 ad 50. Utraque autem per ſequentes conditiones determinatur.

Orbita Cometæ	Parabolica	Elliptica
1. Diſtantia Perihelii a ſole *a* =	75210,10	75004,53
& *l a* =	4,8762762	4,8750875
2. Semi-latus rectum *b* =	150420,20	148508,97
3. Cometa per perihelium tranſiit A. 1742. M. Jan.	$27^d, 4^h, 14'$	$26^d, 16^h, 45'$
4. Diſtantia heliocentrica perihelii a nodo =	$31°, 17', 16''$	$32°, 7', 19''$
5. Longitudo heliocentrica nodi ascendentis =	$6^s, 9°, 43', 7''$	$6^s, 9°, 28' 49''$

 Inclina-

6. Inclinatio orbitæ cometæ ad ad eclipticam =	61°,43′,44″	61°,54′,18″
Conſtantis numeri N logarithmus ſeu l N =	1,7293470	1,7297463

Atque ex his cognitis ad tempus quodvis datum locus cometæ poterit asſignari. Nam a tempore dato ſubtrahatur tempus, quo cometa in perihelio eſt verſatus, & reliquum in diei partibus decimalibus exprimatur, cujus numeri ſumatur logarithmus, a quo ſubtrahatur l N, & remanebit $l\,T = l(t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{\alpha}{3}t^3 - \frac{\alpha}{5}t^5 - \frac{\alpha\alpha}{6}t^3 + \frac{\alpha\alpha}{20}t^5)$, unde valor anomaliæ veræ v per tabulam datam poterit inveniri, ſi pro ellipſi ea præcepta §. 11. tradita in ſubſidium vocentur. Tum ab anomalia vera v ſubtrahatur diſtantia perihelii a nodo, prodibitque di- ſtantia cometæ a nodo heliocentrica.

§. XLVIII.

Computemus ex utraque hypotheſi locum cometæ ad tempus obſeruationis ultimæ Mart. 17^d, 7^h, 50′, quo cometæ longitudo eſt obſervata 2^s, 18°, 52′, & latitudo borealis 63°, 13′. Pro hoc vero tempore colligitur locus terræ = 6^s, 7°, 57′, 30″ & diſtantia terræ a ſole = 99970, 05. Jam tempus propoſitum ad menſem Januarium addendo 59^d, reductum erit.

Tempus propoſitum Jan. =	76^d, 7^h, 50′	76^d, 7^h, 50′
ſubtr. tempar. com. in perih. =	27 , 4 , 14	26 , 16 , 45
	49^d, 3^h, 36′	49^d, 15^h, 5′
Tempus a perihelio elapſum =	49 , 15000	49, 62847
l temp. =	1,6915235	1, 6957309
ſubtr. l N =	1,7293470	1, 7297463

erit

erit l T $=$	9,9621765	9,9659846
Anomalia vera u $=$	74°,56′29″	75°,18′,18″
$\frac{1}{2}$ u $=$	37°,28′,15″	37°,39′, 9″
l ſin $\frac{1}{2}$ u $=$	— — —	9,7859494
l (ſin $\frac{1}{2}$ $u)^2$ $=$	— — —	9,5718988
l tang. $\frac{1}{2}$ u $=$	— — —	9,8873722
	— — —	9,4592710
ſubtr. l $\frac{5}{2\alpha}$ $=$	— — —	2,0969100
	— — —	7,3623610
ſubtrahatur $=$	— — —	4,6855749
	— — —	2,6767861
erit ipſius ϕ pars prior $=$	— — —	475,1″
l (ſin $\frac{1}{2}$ $u)^2$ $=$	— — —	9,5718988
add. l ſin u $=$	— — —	9,9855551
	— — —	9,5574539
ſubtr. l $\frac{15}{2\alpha}$ $=$	— — —	2,5740313
	— — —	6,9834226
ſubtrahatur	— — —	4,6855749
		2,2978477
erit ipſius ϕ pars poſt.	— — —	198,5
Ergo ϕ $=$	— — —	674″
ſeu ϕ $=$	— — —	11′,14″
Anomalia vera v $=$	74°,56′,29″	75°,29′,32″
ſubtr. diſt. perih. a nodo $=$	31 ,17 ,16	32 , 7 ,19
Diſtantia cometæ a nodo $=$	43°,39′,13″	43°,22′,13″

§. XLIX.

Sit in triangulo ſphærico ☊ c γ latus ☊ γ ecliptica, & ☊ c orbita cometæ, erit angulus c ☊ γ inclinatio ad eclipticam. Tum ſumta c ☊ $=$ diſtantiæ cometæ a nodo, erit c locus cometæ *Fig. IV.*

metæ verus in orbita, unde ſi ad ☊γ ducatur normalis cγ, erit arcus cγ latitudo cometæ heliocentrica, & ſi ☊γ ſubtrahatur a longitudine nodi, prodibit cometæ longitudo heliocentrica. Erit vero ex natura triangulorum ſphæricorum ſin cγ = ſin c☊, ſin c☊γ, & tang. ☊γ = coſ. c☊γ. tang. c☊. Quare erit.

☊ c	=	43°,39′,13″	43°,22°,13″
& c ☊ γ	=	61 ,43 ,44	61 ,54 ,18
Hinc *l* ſin c☊	=	9,8390359	9,8367736
add. *l* ſin c☊γ	=	9,9448359	9,9455489
l ſin cγ	=	9,7838718	9,7823225
Latitudo heliocentrica cγ	=	37°,26′,31″	37°,17′, 9″
Porro *l* tang. c☊	=	9,9795815	9,9752805
add. *l* coſ. c☊γ	=	9,6754522	9,6729609
l tang. ☊γ	=	9,6550337	9,6482414
ergo ☊γ	=	24°,19′, 4″	23°,59′,0″
ſubtr. a longitudine nodi		6ˢ,9°,43, 7	6ˢ,9°,28,49
Longitudo heliocentrica		5ˢ,15°,24′, 3″	5ˢ,15°,29′,49″

§. L.

Fig. V. Sit igitur S ſol & T locus terræ, tùm extra planum ecliptica exiſtat cometa in c, unde in eclipticam cadat perpendiculum cγ, erit ducta Sγ, ang. cSγ = latit. cometæ heliocentricæ: unde fit cγ = Sc ſin cSγ & Sγ = Sc coſ. cSγ tum ex γ in CT demittatur perpendiculum γp, erit ob angulum γST datum, quippe qui eſt differentia inter longitudines terræ & cometæ heliocentricas, γp = Sγ ſin γST & Sp = Sγ coſ. γST, hincque fit Tp = ST − Sp. Deinde invenitur tang. STγ = $\frac{p\gamma}{pT}$, qui angulus ad longitudi-

gitudinem ſolis additus dabit cometæ longitudinem geocentricam. Denique erit $T\gamma = \frac{p\,\gamma}{\text{ſin } ST\gamma}$; & tang. $cT\gamma = \frac{c\gamma}{T\gamma}$, qui angulus $cT\gamma$ erit cometæ latitudo geocentrica, atque tandem ſit $\frac{c\gamma}{\text{ſin } cT\gamma} = Tc =$ diſtantiæ cometæ a terra. Oportet itaque primum diſtantiam cometæ a ſole Sc inveſtigari, quæ ex anomalia vera v definitur; erit nempe $Sc = \frac{a(2-\alpha)}{1+(1-\alpha)\text{coſ.}v}$, ubi pro parabola eſt $\alpha = 0$ & pro ellipſi $\alpha = \frac{1}{50}$.

Cum ſit v =	74°,56′,29″	75°,29′,32″
erit coſ.v =	259869	2505114
$1+(1-\alpha)\text{coſ.}v$ =	1,2598069	1,2455012
$\frac{1+(1-\alpha)\text{coſ.}v}{2-\alpha}$ =	0,6299035	0,6290410
hujus logarith. =	9,7992741	9,7986790
ſubtr. a la =	4,8762762	4,8750875
erit $l\ Sc$ =	5,0770021	5,0764085
add. { l ſin $cS\gamma$ =	9,7838730	9,7823233
add. { l coſ. $cS\gamma$ =	9,8998039	9,9007075
$l\ c\gamma$ =	4,8600751	4,8587318
$l\ S\gamma$ =	4,9768060	4,9771160
A long. terræ	6ſ,7°,57′,30″	6ſ,7°,57′,30″
ſubtr. long. cometæ =	5,15,24, 3	5,15,29,49
erit $\gamma\ S\ T$ =	22°,33′,27	22°,27,41″
Ad $l\ S\gamma$ =	4,9768060	4,9771160
add. { l ſin γST =	9,5838903	9,5821324
add. { l coſ.γST =	9,9654346	9,9657364
$l\ \gamma p$ =	4,5606963	4,5592484
$l\ Sp$ =	4,9422406	4,9428524

K. ergo

ergo S p =	87546,86	87670,28
ſubtr. ab S T =	99970,05	99970,05
erit T p =	12423,19	12299,77
a l p γ =	4,5606963	4,5592484
ſubtr. l T p =	4,0942332	4,0898973
l tang. S T γ =	10,4664631	10,4693511
Ergo S T γ =	71°, 8′, 21″	71°, 15′, 19″
ſeu S T γ =	2ſ, 11°, 8′, 21″	2ſ, 11°, 15′, 19″
addatur longitudo ſolis	0, 7, 57, 30	0, 7, 57, 30
Longitudo cometæ geocentri.	2ſ, 19°, 5′, 51″	2ſ, 19°, 12′, 49″
a l γ p =	4,5606963	4,5592484
ſubtr. l ſin S T γ =	9,9760318	9,9763315
ſubtr. l T γ =	4,5846645	4,5829169
a l c γ =	4,8608751	4,8587318
l tang. c T γ =	10,2762106	10,2758149
Latitudo geocentrica =	62°, 6′, 10″	62°, 4′, 52″

§. LI.

Longitudo cometæ inventa utraque non multum ab obſervata, quæ erat 2ſ, 18°, 52′ diſcrepat, at latitudo obſervata 63°, 13′ magis diſcrepat, quam ut error obſervationi tribui poſſit. Utroque autem caſu hypotheſis parabolica propius ad veritatem accedit, quam elliptica, ex quo ſequi videtur, cometæ orbitam non ſolum non eſſe ellipſin, ſed adeo hyperbolam, ita ut iſte cometa neque usquam ante apparuerit nobis, neque unquam ad nos ſit reverſurus. Atque hæc concluſio omnino firma ac veritati conſentanea eſſet cenſenda, ſi tam tres illæ obſervationes, ex quibus hæc theoria erat derivata, quam hæc quarta ſumma accuratione eſſent factæ, ut nulla prorſus correctione indigeant. Manifeſtum enim eſt ſi tres obſervationes

ad

ad theoriam condendam aſſumtæ aliquantillum immutentur, orbitam cometæ inde reſultantem ſenſibiliter discrepare, ſicque magis minusve reliquis obſervationibus convenire; ita ut ex discrepantia reliquarum obſervationum a calculo non tam ſpecies orbitæ cometæ, quam defectus obſervationum concludi poſſit. Interim tamen perſpicitur, ſi obſervationes hujus cometæ ad minuta prima eſſent exactæ, tum aberrationem orbitæ cometæ a figura parabolica cognoſci poſſe, dummodo orbitæ parabolicæ tanta latitudo concedatur, quanta ex minutis ſecundis, quæ in obſervationibus ſunt neglecta, oriri potuit. Applicatio enim orbitæ inventæ ad obſervationem ultimam in longitudine cometæ differentiam 7′, in latitudine vero 1′, 18″, produxit, qua differentiæ ortæ ſunt ab orbita parabolica & elliptica tam prope ad parabolicam accedente, ut ſemilatus rectum a dupla diſtantia verticis a foco tantum parte quinquageſima differret. At vero ut hæc concluſio ſit certa, requiritur ut orbita cometæ ex tribus obſervationibus eruta his ipſis obſervationibus exactiſſime reſpondeat, antequam eam cum reliquis obſervationibus comparare liceat. Cum igitur tam ob calculi prolixitatem, quam ob hypotheſin ratione arearum aliquantum a vero recedentem in ipſam orbitam inventam nonnulli errores irrepere potuerint, ab iis concluſio eruta primum purgari debebit, id quod methodo hactenus tradita minus exacte fieri poterit.

§. LII.

His igitur expoſitis quæſtio huc reducitur, ut, ſi orbita cometæ jam proxime fuerit cognita, ea corrigatur, atque ad veritatem penitus perducatur, cujus problematis utiliſſimi at-

que in theoria tam planetarum quam cometarum graviſſimi ſolutionem hic facilem & expeditam ſum traditurus. Pono igitur jam eſſe inventam orbitam parabolicam, quæ obſervationibus ſatis prope conveniat, talem enim methodus ante tradita facile largitur, atque multo minore labore quam hic impendi, ſi quidem concluſione proxime vera acquiescere velimus. Ex hac orbita parabolica igitur ſuperiori methodo inventa definiri debet orbita cometæ vera ſive ſit parabolica ſive elliptica, ſive hyperbolica, quæ ſex conditionibus determinabitur, primo ſcilicet diſtantia perihelii a ſole; ſecundo ratione hujus diſtantiæ ad ſemilatus rectum: tertio, tempore, quo cometa in perihelio eſt verſatus: quarto diſtantia perihelii a linea nodorum: quinto longitudine nodi ascendentis ſive descendentis heliocentrica; & ſexto inclinatione orbitæ cometæ ad eclipticam. Hæ autem ſex res orbitam cometæ veram determinantes non multum discrepabunt ab iis, quibus orbita cometæ prope vera parabolica determinatur, ita ut differentiæ futuræ ſint quam minimæ, atque inſtar differentialium tractari posſint. Sit igitur

In orbita cometæ.	Parabolica prope vera	Vera
1. Diſtantia perihelii a ſole =	a	$a + A$
2. Semilatus rectum ad diſtant. perih. a ſole =	2 : 1	2 − B : 1
3. Tempus quo cometa in perihelio fuit =	t	$t + T^b$
4. Diſtantia perihelii a nodo =	p	$p + P^{\circ}$
5. Longitudo nodi accendentis =	q	$q + Q^{\circ}$
6. Inclinatio orbitæ ad ecliptic. =	r	$r + R^{\circ}$

Hic igitur datæ ſunt quantit. $a, t, p,$ q, & r, quippe quæ

ex

ex orbita cometæ parabolica priori methodo inventa ſunt cognitæ: litteræ autem majuſculæ A, B, T, P, Q & R denotant quantitates minimas incognitas, quarum valores ſi fuerint reperti, vera cometæ orbita erit cognita.

§. LIII.

Ad has autem incognitas A, B, T, P, Q & R inveniendas fingo ſex hypotheſes pro orbita cometæ, quarum unaquæque unico tantum capite ab orbita parabolica diſcrepet: atque hoc diſcrimen pro lubitu aſſumo datum & valde parvum, ſcilicet pro cometa, de quo eſt hic quæſtio, has ſex hypotheſes ita commodiſſime mihi quidem fingere videor.

Orbita cometæ	Parab.	Hyp. I.	Hyp. II.	Hyp. III.	Hyp. IV.	Hyp. V.	Hyp. VI.
1 Diſtantia perihelii a ſole =	a	$a+200$	a	a	a	a	a
2. Semi-latus rectum ad diſt. perihelii a ſole. =	2 : 1	2 : 1	99 : 50	2 : 1	2 : 1	2 : 1	2 : 1
3. Tempus quo cometa in perihelio eſt verſatus =	t	t	t	$t+12^h$	t	t	t
4. Diſtantia perihelii a nodo heliocentr. =	p	p	p	p	$p+1^\circ$	p	p
5. Longitudo nodi aſcend. =	q	q	q	q	q	$q+1^\circ$	q
6. Inclinatio orbitæ ad eclipticam. =	r	r	r	r	r	r	$r+1^\circ$

Computetur nunc tam ex orbita parabolica, quam ex unaquaque hypotheſi locus cometæ ad tempus aliquod datum, quo obſervatio eſt inſtituta; ſitque longitudo cometæ ex orbita parabolica inventa $= m$; & latitudo $= n$, ex hypotheſibus vero prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta & ſexta ortæ ſint cometæ pro eodem tempore longitudines m; $m^{I}, m^{II}, m^{III}, m^{IV}, m^{V}, m^{VI}$ & latitudines $n^{I}, n^{II}, n^{III}, n^{IV}, n^{V}, n^{VI}$. In hypotheſi igitur prima incrementum 200 ipſi a adjectum longitudinem auxit parte $m'-m$: & latitudinem parte $n'-n$; unde concluditur incrementum incognitum A longitudinem m aucturum eſſe parte $\frac{(m'-m)A}{200}$, & latitudinem n parte $\frac{(n'-n)A}{200}$, ſimili modo in ſecunda hyp. cum $\frac{1}{50}$ a ratione 2 : 1 demta augeat longitudinem m parte $m''-m$ & latitudinem parte $n''-n$, concluditur a parte incognita B, longitudinem augeri parte $(m''-m)\,50\,B$ & latitudinem parte $(n''-n)\,50\,B$. Atque pari modo reliquas hypotheſes perpendendo concluditur ex theoria cometæ vera, etſi incognita, prodituram fuiſſe cometæ longitudinem $= m + \frac{(m'-m)A}{200} + (m''-m)\,50\,B + \frac{(m^{III}-m)T}{12} + (m^{IV}-m)\,P + (m^{V}-m)\,Q + (m^{VI}-m)\,R$ & latitudinem $= n + \frac{(n'-n)A}{200} + (n''-n)\,50\,B + \frac{(n'''-n)\ T}{12} + (n^{IV}-n)\,P + (n^{V}-n)\,Q + (n^{VI}-n)\,R$. Cum igitur hæc

hæc longitudo & latitudo cum loco cometæ obſervato congruere debeat, ſi ponatur cometæ longitudo obſervata $= M$, & latitudo obſervata $= N$, habebuntur ſequentes duæ æquationes:

$$M - m = \frac{(m' - m)A}{200} + (m'' - m)\, 50\, B + \frac{(m''' - m)T}{12} + (m^{IV} - m)\, P + (m^{V} - m)\, Q + (m^{VI} - m)\, R;$$

atque

$$N - n = \frac{(n' - n)A}{200} + (n'' - n)\, 50\, B + \frac{(n''' - n)T}{12} + (n^{IV} - n)\, P + (n^{V} - n)\, Q + (n^{VI} - n)\, R,$$

in quibus brevitatis ergo ponatur $\frac{A}{200} = F$, $50\,B = G$ & $\frac{T}{12} = H$.

§. LIV.

Tres itaque obſervationes hoc modo pertractatæ ſex præbebunt hujusmodi æquationes, quæ ſufficere videantur ad ſex incognitas A, B, T, P, Q & R determinandas, verum quia orbita cometæ eſt planum per ſolem tranſiens, duæ latitudines tertiam jam determinant, ita ut una ſex illarum æquationum nihil ſit profutura. Hanc obrem ad iſtas ſex incognitas definiendas oportebit quatuor obſervationes adhiberi, quæ cum octo ſuppeditent æquationes, duæ ex latitudinibus ortæ omittantur, & ex ſex reliquis correctiones neceſſariæ determinentur. Quod ſi fuerit factum, orbita cometæ habebitur quatuor locis obſervatis ſatisfaciens, hincque omnibus numeris abſoluta, quæ ad quodvis tempus cometæ locum exactiſſime ſit monſtratura, ſiquidem obſervationes, quibus ad hoc inſtitutum uſi fuerimus fuerint ſatis exactæ, neque plus uno minuto primo

a veritate aberrent. Quanquam autem obſervationes cometæ a Celeb. Delislio mecum communicatæ omnes vix ad hunc perfectionis gradum perductæ videntur, propterea quod Vir Celeberrimus mihi ſcribit, ſe nondum potuiſſe cunctas obſervationes pari diligentia examini ſubjicere, atque ab omnibus nævis purgare, tamen ex iis quatuor eligam ad methodum hanc illuſtrandam, quæ ſi fuerint ſatis accuratæ, orbitam cometæ veram indicabunt, ſin autem minus fuerint exactæ, laboris ſuſcepti tamen non pœnitebit, quod hoc modo ſaltem via ſit patefacta, per quam ſi obſervationes magis idoneæ impetrentur, ad ſcopum propoſitum pertingere liceat. Eligantur itaque quatuor ſequentes obſervationes.

Temp. medio	Long. com.	Lat. com.	Locus terræ	diſt ter-a ſol.
Febr. $25^d, 10^h, 0'$	$9^s, 24°, 13'$	$56°, 29'$	$5^s, 18°, 13', 5''$	99403, 70
Mart. $1^d, 15^h, 10'$	10, 22, 13	$75°, 29'$	5, 22, 25, 4	99520, 24
— $6^d, 14^h, 15'$	1, 12, 44	$77°, 37'$	5, 27, 20, 38	99660, 46
— $15^d, 6^h, 45'$	2, 16, 18	$65°, 20'$	6, 5, 56, 27	99910, 76

§. LV.

Sumamus jam orbitam cometæ parabolicam ante inventam, quam corrigi oporteat, eique adjungamus ſex hypotheſes ante deſcriptas.

Orbita Cometæ	Parabolica	Hypoth. I.	Hypoth. II.
I. Diſt. per. a ☉. a =	75210	75410	75210
$l\,a$ =	4, 8762756	4, 8774289	4, 8762756
II. Ratio $b : a$ =	2 : 1	2 : 1	99 : 50
III. Temp. Per. t =	Jan. $27^d, 4^h, 14'$	Jan. $27^d, 4^h, 14'$	Jan. $27^d, 4^h, 14'$
IV. Diſt. per a ☊ p =	$31°, 17'$	$31°, 17'$	$31°, 17'$
V. Long. ☊ q =	$6^s, 9°, 43'$	$6^s, 9°, 43'$	$6^s, 9°, 43'$
VI. Inclinatio r =	$61°, 44'$	$61°, 44'$	$61°, 44$
& l N =	1, 7293461	1, 7310741	1, 7315285

Hypoth.

Hypoth. III.	Hypoth. IV.	Hypoth. V.	Hypoth. VI.
a = 75210	75210	75210	75210
la = 4,8762756	4, 8762756	4, 8762756	4, 8762756
$b : a$ = 2 : 1	2 : 1	2 : 1	2 : 1
t = Jan. 27^d,16^h,14	Jan. 27^d, 4^h, 14′	Jan. 27^d, 4^h, 14′	Jan. 27^d, 4^h, 14′
p = 31°, 17′	32° , 17′	31°, 17′	31°, 17′
q = 6^s, 9°, 43′	6^s, 9°, 43′	6^s, 10°, 43′	6^s, 9°, 43′
r = 61°, 44′	61°, 44′	61°, 44′	62°, 44′
lN = 1,7293461	1, 7293461	1, 7293461	1, 7293461

Quod ſi ergo per 4 obſervationes modo indicato ſex correctiones A, B, T, P, Q & R definiantur ex totidem æquationibus, tum habebitur orbita cometæ vera quæ per ſex conditiones ſequentes determinabitur.

Orbita cometæ		Vera
I. Diſtantia perihelii a ſole	=	75210 + A
II. Semilatus rectum ad diſtantiam hanc		2 − B : 1
III. Tempus quo cometa fuit in perihel.		Jan. 27^d, 4^h, 14′ + T^h.
IV. Diſtantia perihelii a nodo ☊	=	31°, 17′ + P°
V. Longitudo nodi aſcendentis ☊	=	6^s, 9°, 43′ + Q°
VI. Inclinatio Orbitæ com. ad eclipt.		61°, 44′ + R°.

ubi manifeſtum, eſt ſi valor ipſius B reperiatur affirmativus, fore orbitam cometæ ellipſin, ſin autem ſit B negativum, erit orbita cometæ hyperbola.

§. LVI.

Si jam ad tempus primæ obſervationis Febr. 25^d, 10^h, 0′, tam ex orbita parabolica, quam ex ſex hypotheſibus computentur cometæ loca geocentrica, reperietur.

Cometæ	Longitudo	Latitudo
in Orbita Parabolica m	$9^s, 24°, 31', 0''$	$n = 56°, 55', 20''$
Hypoth. I. $m' =$	9, 23, 53, 0	$n' = 56, 43, 50$
Hypoth. II. $m'' =$	9, 25, 1, 30	$n'' = 56, 24, 50$
Hypoth. III. $m''' =$	9, 24, 22, 30	$n''' = 55, 12, 0$
Hypoth. IV. $m^{IV} =$	9, 22, 21, 50	$n^{IV} = 55, 2, 20$
Hypoth. V. $m^{V} =$	9, 22, 44, 10	$n^{V} = 55, 8, 40$
Hypoth. VI. $m^{VI} =$	9, 24, 7, 50	$n^{IV} = 56, 29, 20$
Per Obſerv. M.	9, 24, 13, 0	$N = 56, 29, 0$

Ex his itaque formentur æquationes modo (53) præſcripto

	in denis''		in denis''
$M - m = -18', 0''$	− 108	$N - n = -26', 20''$	− 158
$m' - m = -38, 0$	− 228	$n' - n = -11, 30$	− 69
$m'' - m = +30, 30$	+ 183	$n'' - n = -30, 30$	− 183
$m''' - m = -8, 30$	− 51	$n''' - n = -43, 20$	− 260
$m^{IV} - m = -2°, 9, 10$	− 775	$n^{IV} - n = -1°, 53, 00$	− 678
$m^{V} - m = -1, 46, 50$	− 641	$n^{V} - n = -1°, 46, 40$	− 640
$m^{VI} - m = -23, 10$	− 139	$n^{VI} - n - - 26, 0$	− 156

Fietque ex longitudinibus

$$-108 = -228F + 183G - 51H - 775P - 641Q - 139R.$$

& ex latitudinibus

$$-158 = -69F - 183G - 260H - 678P - 640Q - 156R.$$

§. LVII.

Ad tempus ſecundæ obſervationis Marti. 1^d, 15^h, $10'$ loca cometæ computata erunt.

Cometæ

Cometæ		Longitudo	Latitudo
Orbita Parab.	$m =$	10,21,54,50	$n = 75°,17',10''$
Hypoth. I.	$m' =$	10,20,41, 0	$n' = 75\ ,19,30$
Hypoth. II.	$m'' =$	10,22,23,40	$n'' = 74\ ,44,20$
Hypoth. III.	$m''' =$	10,20, 5,10	$n''' = 74\ ,16,\ 0$
Hypoth. IV.	$m^{IV} =$	10,21,50,40	$n^{IV} = 72\ ,42,\ 0$
Hypoth. V.	$m^{V} =$	10,15,27,10	$n^{V} = 74,\ 0,40$
Hypoth. VI.	$m^{VI} =$	10,19,27,50	$n^{VI} = 74\ ,42,50$
Per Obſerv.	$M =$	10,22,13, 0	$N = 75\ ,29,\ 0$

Ex his ergo fiet

	in denis''		in denis''
$M-m=+\ 18',10''$	$+\ 109$	$N-n=+\ 11',50''$	$+\ 71$
$m'-m=-\ 1°,13',50''$	$-\ 443$	$n'-n=+\ 2\ ,20$	$+\ 14$
$m''-m=+\ 0\ ,28,50$	$+\ 173$	$n''-n=-\ 32\ ,50$	$-\ 197$
$m'''-m=-\ 1\ ,49,40$	$-\ 658$	$n'''-n=-\ 61\ ,10$	$-\ 367$
$m^{IV}-m=-\ 4,10$	$-\ 25$	$n^{IV}-n=-2°,35,10$	$-\ 931$
$m^{V}-m=-\ 6\ ,27,40$	-2326	$n^{V}-n=-\ 1°,16,20$	$-\ 458$
$m^{VI}-m=-\ 2\ ,27,\ 0$	$-\ 882$	$n^{VI}-n=-\ 34,20$	$-\ 206$

Quare ex longitudinibus naſcitur hæc æquatio

$$+109 = -443F + 173G - 658H - 25P - 2326Q - 882R.$$

& ex latitudinibus hæc

$$+71 = +14F - 197G - 367H - 931P - 458Q - 206R.$$

§. LVIII.

Loca cometæ ad tertiæ obſervationis tempus quod erat Mart. 6^d, 14^h, $15'$, ſupputata ſunt.

Cometæ	Longitudo	Latitudo
Orb. Parabol. $m =$	$1', 12^\circ, 28', 30''$	$n = 77^\circ, 39', 10''$
Hypoth. I. $m' =$	$1, 12, 43, 40$	$n' = 77, 53, 10$
Hypoth. II. $m'' =$	$1, 10, 40, 0$	$n'' = 77, 21, 30$
Hypoth. III. $m''' =$	$1, 10, 1, 10$	$n''' = 77, 44, 30$
Hypoth. IV. $m^{IV} =$	$1, 12, 1, 20$	$n^{IV} = 78, 41, 10$
Hypoth. V. $m^{V} =$	$1, 6, 28, 20$	$n^{V} = 78, 54, 50$
Hypoth. VI. $m^{VI} =$	$1, 8, 25, 40$	$n^{VI} = 78, 15, 0$
Per Obſerv. $M =$	$1, 12, 44, 0$	$N = 77, 37, 0$

Hinc ergo habetur.

$M - m = + 15', 30'', = + 93$	$N - n = - 2', 10 = - 13$
$m' - m = + 15, 10, = + 91$	$n' - n = + 14, 0 = + 84$
$m'' - m = - 1^\circ, 48, 30, = - 651$	$n'' - n = - 17, 40 = - 106$
$m''' - m = - 2^\circ, 27, 20, = - 884$	$n''' - n = + 5, 20 = + 32$
$m^{IV} - m = - 27, 10, = - 163$	$n^{IV} - n = + 62, 0 = + 372$
$m^{V} - m = - 6, 0, 10 = - 2161$	$n^{V} - n = + 75, 40 = + 454$
$m^{VI} - m = - 4, 2, 50 = - 1457$	$n^{VI} - n = + 95, 50 = + 575$

Longitudines ergo præbent hanc æquationem

$$+93 = +91F - 651G - 884H - 163P - 2161Q - 1457R.$$

Latitudines vero dabunt hanc

$$-13 = +84F - 106G + 32H + 372P + 454Q + 575R$$

§. LIX.

Ad quartam denique obſervationem, quæ facta eſt M. Mart. 15^d, 6^h, $45'$, loca cometæ ita ſe habent.

Cometæ

Cometæ	Longitudo	Latitudo
In Orb. Parabol. $m =$	$2^s, 16^\circ, 44', 10''$	$n = 64^\circ, 21', 50''$
Hypoth. I. $m' =$	2 ,17 , 5 ,50	$n' =$ 64 ,26 , 10
Hypoth. II. $m'' =$	2 ,15 ,48 ,40	$n'' =$ 64 ,14 , 30
Hypoth. III. $m''' =$	2 ,16 ,31 ,10	$n''' =$ 64 ,24 , 0
Hypoth. IV. $m^{IV} =$	2 ,18 ,27 ,40	$n^{IV} =$ 64 ,44 , 0
Hypoth. V. $m^{V} =$	2 ,16 ,42 ,20	$n^{V} =$ 65 ,29 , 30
Hypoth. VI. $m^{VI} =$	2 ,15 ,53 ,20	$n^{VI} =$ 65 ,19 , 20
Per Obſerv. M. $=$	2 ,16 ,18 , 0	$N =$ 65 ,20 , 0

Quare erit

	in denis''		
$M - m = -26', 10''$	$-$ 157	$N - n = + 58', 10''$	$+$ 349
$m' - m = +21, 40$	$+$ 130	$n' - n = +$ 4 ,20	$+$ 26
$m'' - m = -55, 30$	$-$ 333	$n'' - n = -$ 7 ,20	$-$ 44
$m''' - m = -13, 0$	$-$ 78	$n''' - n = +$ 2 ,10	$+$ 13
$m^{IV} - m = +1^\circ, 43, 30$	$+$ 621	$n^{IV} - n = +$ 22 ,10	$+$ 133
$m^{V} - m = -$ 1, 50	$-$ 11	$n^{V} - n = +$ 67 ,40	$+$ 406
$m^{VI} - m = -$ 50,50	$-$ 305	$n^{VI} - n = +$ 57 ,30	$+$ 345

Longitudines ergo præbent hanc æquationem

$$-157 = +130F - 333G - 78H + 621P - 11Q - 305R$$

& latitudines hanc

$$+349 = +26F - 44G + 13H + 133P + 406Q + 345R$$

§. LX.

Nacti ergo ſumus octo æquationes, quarum ſi duæ ex latitudinibus binarum mediarum obſervationum ortæ omittantur,

tantur, ſupererunt ſex ſequentes æquationes, ex quibus incognitas F, G, H, P, Q & R definiri oportebit.

$$0 = +108 - 228F + 183G - 51H - 775P - 641Q - 139R$$
$$0 = +109 + 443F - 173G + 658H + 25P + 2326Q + 882R$$
$$0 = +93 - 91F + 651G + 884H + 163P + 2161Q + 1457R$$
$$0 = +157 + 130F - 333G - 78H + 621P - 11Q - 305R$$
$$0 = +158 - 69F - 183G - 260H - 678P - 640Q - 156R$$
$$0 = +349 - 26F + 44G - 13H - 133P - 406Q - 345R$$

Unde ſex ſequentes valores reperiuntur pro R.

$$R = -10,77697 - 1,64025F + 1,31655G - 0,36690H - 5,57554P - 4,61151Q$$
$$R = -0,12358 - 0,50227F + 0,19614G - 0,74603H - 0,02834P - 2,63719Q$$
$$R = -0,06383 + 0,06246F - 0,44681G - 0,60673H - 0,11187P - 1,48318Q$$
$$R = +0,51475 + 0,42623F - 1,09180G - 0,25574H + 2,03607P - 0,03606Q$$
$$R = +1,01282 - 0,44231F - 1,17308G - 1,66667H - 4,34615P - 4,10256Q$$
$$R = +1,01159 - 0,07536F + 0,12753G - 0,03768H - 0,38551P - 1,17681Q$$

Subtrahantur ſinguli valores a primo & prodibunt quinque ſequentes æquationes.

$$0 = +90055 - 113798F + 112041G + 37913H - 554720P - 197432Q$$
$$0 = +84080 - 170271F + 176336G + 23983H - 546367P - 312833Q$$
$$0 = +26222 - 206648F + 240835G - 11116H - 761161P - 457545Q$$
$$0 = -23585 - 119794F + 248963G + 129977H - 122939P - 50895Q$$
$$0 = -23462 - 156489F + 118902G - 32922H - 519003P - 343470Q$$

Hinc reperiuntur quinque valores pro F.

$$F = +0,79136 + 0,98456G + 0,33316H - 4,87460P - 1,73493Q$$
$$F = +0,49380 + 1,03562G + 0,14085H - 3,20881P - 1,83726Q$$
$$F = +0,12689 + 1,16544G - 0,05379H - 3,68337P - 2,21413Q$$
$$F = -0,19683 + 2,07826G + 1,08505H - 1,02625P - 0,42485Q$$
$$F = -0,14992 + 0,75981G - 0,21038H - 3,31655P - 2,19485Q$$

Subtra-

Subtrahatur valor penultimus a reliquis orienturque, quatuor æquationes ſequentes.

$$0 = +98824 - 109370G - 75189H - 384835P - 131008Q$$
$$0 = +69068 - 104264G - 94420H - 218256P - 141241Q$$
$$0 = +32377 - 91282G - 113884H - 265712P - 178928Q$$
$$0 = +4696 - 131845G - 129543H - 229030P - 177000Q$$

Hinc quatuor obtinentur valores pro P

$$P = +0{,}25679 - 0{,}28420G - 0{,}19538H - 0{,}34043Q$$
$$P = +0{,}31645 - 0{,}47771G - 0{,}43261H - 0{,}64713Q$$
$$P = +0{,}12185 - 0{,}34354G - 0{,}42860H - 0{,}67338Q$$
$$P = +0{,}02050 - 0{,}57567G - 0{,}56562H - 0{,}77283Q$$

ſubtrahatur primus a reliquis, eritque

$$0 = +5966 - 19351G - 23723H - 30670Q$$
$$0 = -13494 - 5934G - 23322H - 33295Q$$
$$0 = -23629 - 29147G - 37024H - 43240Q$$

quae aequationes tres valores praebent pro Q

$$Q = +0{,}19452 - 0{,}63094G - 0{,}77349H$$
$$Q = -0{,}40528 - 0{,}17822G - 0{,}70046H$$
$$Q = -0{,}54646 - 0{,}67407G - 0{,}85624H$$

ſubtrahatur media a reliquis erit

$$0 = +59980 - 45272G - 7303H$$
$$0 = -14118 - 49585G - 15578H$$

& reperientur pro G duo valores

$$G = +1{,}32488 - 0{,}16131H$$
$$G = -0{,}28472 - 0{,}31416H$$

qui a ſe invicem ſubducti relinquunt

$0 = 160960 + 15285H$, ex qua reperitur

$H = -10{,}53058$ & $T = -126{,}36696$

Hinc

Hinc regrediendo erit

$G = + 3,02358$; & $B = + 0,06047$
$Q = + 6,43210$
$P = - 0,73470$
$F = - 7,21821$ & $A = - 1443,642$
$R = - 5,14819$

§. LXI.

Orbita ergo cometæ, quantum quidem cum obſervationum bonitas, tum calculi non parum moleſti rectitudo concluſionem formare permittit, ſequentibus ſex conditionibus determinabitur.

1. Diſtantia perihelii a ſole a = 73766,36
ejusque $l\,a$ = 4,8678584
2. Semi-latus rectum eſt ad a ut 193952 ad 100000
ſeu ſi ratio hæc ponatur $2-\alpha$ ad 1 erit
α = 0,06047
3. Cometa per perihelium tranſiit. M. Jan. $21^d, 21^h, 52'$
4. Diſtantia perihelii a nodo aſcend. $30°, 32', 55''$
5. Longitudo nodi aſcendentis : $6^s, 16°, 8', 55''$
6. Inclinatio orbitæ ad eclipticam $56°, 35', 7''$

Erit ergo orbita cometæ ellipſis, quia latus rectum minus eſt quam diſtantia perihelii a ſole quater ſumta; huiusque ellipſis ſemiaxis transverſus eſt $= \frac{a}{\alpha} = 1219883$, poſito orbitæ terræ ſemiaxe transverſo = 100000. Cum igitur tempora periodica teneant axium transverſorum rationem ſesquiplicatam, erit tempus periodicum hujus cometæ circiter 42 annorum, & iſte cometa in aphelio ſuo duplo longius & ultra

a ſole

a ſole recedit, quam ſaturnus; Huic autem concluſioni non tuto confidere licet, priusquam cum de obſervationum bonitate fuerimus certiores, tum etiam univerſus calculus a principio fuerit repetitus. Quodſi autem hæc orbita cometæ veritati conſentanea eſſe comperiatur, tum ea in locum orbitæ denuo corrigendæ ſubſtituatur, atque ex quatuor obſervationibus ea per methodum modo expoſitam ad ſummum certitudinis gradum evehetur, quem laborem aliis ſuſcipiendum relinquo, methodum certam in hac diſſertatione tradidiſſe contentus.

§. LXII.

Antequam autem hic poſterior calculus pro correctionibus inſtitutus a capite ad calcem ſit repetitus & ab omni errore purgatus, expediet ex orbita cometæ parabolica præcipua phænomena perpendere ac dijudicare: ac primo quidem cometa terræ proximus fuiſſe deprehendetur Febr. d. 24. quo tempore ejus a terra diſtantia vix ſuperabat tertiam partem diſtantiæ terræ à ſole. Ante & poſt hoc tempus cometa longius a terra fuit remotus: & ſub finem apparitionis nondum ad ſolis diſtantiam receſſit; ita ut hic cometa a nobis conſpici nequeat, niſi ſole fuerit propior. Quare evenire utique poterit, ut hic cometa idem ſæpius ad perihelium revertatur, neque tamen nobis fiat conſpicuus: obſervari enim non poterit, niſi terra circa alterum cometæ nodum verſetur eo tempore quo cometa eclipticam in hac regione trajicit. Diameter apparens hujus cometæ d. 3. Mart. deprehenſa eſt circiter 25″, ex qua cum ejus diſtantia a terra illo tempore collata ſequitur

M diameter

diameter vera corporis ſeu nuclei cometæ vix ſemi diametrum terræ ſuperaſſe: erat ergo hic cometa Marte non multo minor, qui planeta cum in multo majoribus diſtantiis diſtincte conſpiciatur, veriſimile eſt cometas ob comam atque caudam plurimum offuscari. In denſa ſcilicet athmoſphæra radii ſolis non ſolum ingentem patiuntur refractionem, ſed etiam reflexio maxime impedietur; ita ut parvus radiorum numerus ad nos revertatur. Quam ob cauſam ex lumine cometæ debili perperam ejus a terra diſtantia colligi poteſt. Deinde ob inſignem illam radiorum lucis refractionem fieri poteſt, ut etiam maxima hemiſphærii a ſole averſi pars in cometa illuminetur; hincque nunquam in cometa phaſes, ſicuti in Luna & Venere obſervari ſolent. Atque hic noviſſimus cometa ſemper pleno lumine ſplendere eſt obſervatus, etiamſi in quadrato ſolis eſſet verſatus, quo tempore falcatus conſpici debuiſſet, niſi tanta refractio affuiſſet.

TABULA
MOTUS COMETAE IN PARABOLA.

Ad finem diſſertationis de cometa adjungenda.

v An.vera	$t + \frac{1}{3}t^3$ AreaParab.	$l(t + \frac{1}{3}t^3)$ Logar. Ar.	v An.vera	$t + \frac{1}{3}t^3$ AreaParab.	$l(t + \frac{1}{3}t^3)$ Lo. Ar.Par.
grad. 0	0,0000000	$-\infty$	grad. 9	0,0788642	8,8968799
	87271	∞		88477	461787
1.	0,0087271	7,9408700	10.	0,0877119	8,9430586
	87297	3010946		88747	418584
2.	0,0174568	8,2419646	11.	0,0965866	8,9849170
	87351	1752024		89046	382992
3.	0,0261919	8,4171670	12.	0,1054912	9,0232162
	87431	1260937		89374	353183
4.	0,0349350	8,5432607	13.	0,1144286	9,0585345
	87536	971075		89731	327867
5.	0,0436886	8,6403682	14.	0,1234017	9,0913212
	87672	794253		90114	306097
6.	0,0524558	8,7197935	15.	0,1324131	9,1219309
	87831	672339		90530	287215
7.	0,0612389	8,7870274	16.	0,1414661	9,1506524
	88019	583237		90976	270679
8.	0,0700408	8,8453511	17.	0,1505637	9,1777203
	88234	515288		91451	255974
9.	0,0788642	8,8968799	18.	0,1597088	9,2033177

Nachricht an den Buchbinder: dieſe Tabelle wird zwiſchen p. 90. und 91. gebunden.

v An.vera	$t+\frac{1}{3}t^3$ Ar. Parob.	$l(t+\frac{1}{3}t^3)$ Logar. Ar.	v An.vera	$t+\frac{1}{3}t^3$ Ar. Parab.	$l(t+\frac{1}{3}t^3)$ Lo. Ar.Pas.
grad. 18	0, 1597088	9, 2033177	grad. 33	0, 3048770	9, 4841247
	91959	243240		103816	145422
19.	0, 1689047	9, 2276417	34.	0, 3152586	9, 4986669
	92497	231548		104885	142137
20.	0, 1781544	9, 2507965	35.	0, 3257471	9, 5128806
	93068	221149		106068	139059
21.	0, 1874612	9, 2729114	36.	0, 3363539	9, 5267965
	93672	211763		107278	136352
22.	0, 1968284	9, 2940877	37.	0, 3470817	9, 5404317
	94310	203259		108539	133731
23.	0, 2062594	9, 3144136	38.	0, 3579356	9, 5538048
	94982	195525		109852	131283
24.	0, 2157576	9, 3339661	39.	0, 3689208	9, 5669331
	95691	188466		111216	128990
25.	0, 2253267	9, 3528127	40.	0, 3800424	9, 5798321
	96433	181997		112641	126850
26.	0, 2349700	9, 3710124	41.	0, 3913065	9, 5925171
	97212	176060		114118	124843
27.	0, 2446912	9, 3886184	42.	0, 4027183	9, 6050014
	98033	170599		115660	122971
28.	0, 2544945	9, 4056783	43.	0, 4142843	9, 6172985
	98888	165557		117260	121216
29.	0, 2643833	9, 4222340	44.	0, 4260103	9, 6294201
	99784	160895		118926	119577
30.	0, 2743617	9, 4383235	45.	0, 4379029	9, 6413778
	100724	156582		120658	118045
31.	0, 2844341	9, 4539817	46.	0, 4499687	9, 6531823
	101703	152575		122459	116614
32.	0, 2946044	9, 4692392	47.	0, 4622146	9, 6648437
	102726	148855		124331	115276
33.	0, 3048770	9, 4841247	48.	0, 4746477	9, 6763713

v An.vera	$t+\frac{1}{3}t^3$ Ar. Parab.	$l(t+\frac{1}{3}t^3)$ Lo.Ar.Par.	v An.vera	$t+\frac{1}{3}t^3$ Ar. Parab.	$l(t+\frac{1}{3}t^3)$ Lo.Ar.Par.
grad. 48	0,4746477	9,6763713	grad.62.	0,6731708	9,8281252
	126281	114036		163373	104142
49.	0,4872758	9,6877749	63.	0,6895081	9,8385394
	128303	112873		166905	103875
50.	0,5001061	9,6990622	64.	0,7061986	9,8489269
	130409	111796		170584	103657
51.	0,5131470	9,7102418	65.	0,7232570	9,8592926
	132601	110800		174422	103493
52.	0,5264071	9,7213218	66.	0,7406992	9,8696419
	134876	109873		178421	103374
53.	0,5398947	9,7323091	67.	0,7585413	9,8799793
	137244	109020		182590	103300
54.	0,5536191	9,7432111	68.	0,7768003	9,8903093
	139707	108235		186942	103279
55.	0,5675898	9,7540346	69.	0,7954945	9,9006372
	142270	107517		191480	103298
56.	0,5818168	9,7647863	70.	0,8146425	9,9109670
	144935	106860		196220	103368
57.	0,5963103	9,7754723	71.	0,8342645	9,9213038
	147708	106266		201166	103479
58.	0,6110811	9,7860989	72.	0,8543811	9,9316517
	150594	105729		206334	103635
59.	0,6261405	9,7966718	73.	0,8750145	9,9420152
	153598	105251		211731	103837
60.	0,6415003	9,8071969	74.	0,8961876	9,9523989
	156725	104827		217378	104084
61.	0,6571728	9,8176796	75.	0,9179254	9,9628073
	159980	104456		223277	104375
62.	0,6731708	9,8281252	76.	0,9402531	9,9732448

v An. ver.	$t + \frac{1}{3} t^3$ Ar. Parab.	$l\,(t + \frac{1}{3} t^3)$ Lo. Ar. Par.	v An. ver.	$t + \frac{1}{3} t^3$ Ar. Parab.	$l\,(t + \frac{1}{3} t^3)$ Lo. Ar. Par.
76.	0, 9402531	9, 9732448	91.	1, 3688601	10,1363592
	229451	104709		368111	115245
77.	0, 9631982	9, 9837157	92.	1, 4056712	10,1478837
	235911	105087		381665	116346
78.	0, 9867893	9, 9942244	93.	1, 4438377	10,1595183
	242677	105512		395965	117500
79.	1, 0110570	10, 0047756	94.	1, 4834342	10,1712683
	249760	105982		411070	118708
80.	1, 0360330	10, 0153738	95.	1, 5245412	10.1831391
	257185	106491		427036	119978
81.	1, 0617515	10,0260229	96.	1, 5672448	10,1951369
	264969	107052		443914	121302
82.	1, 0882484	10,0367281	97.	1, 6116362	10,2072671
	273131	107655		461777	122686
83.	1, 1155615	10,0474936	98.	1, 6578139	10,2195357
	281699	108304		480706	124140
84.	1, 1437314	10,0583240	99.	1, 7058845	10,2319497
	290689	109001		500758	125650
85.	1, 1728003	10,0692241	100.	1, 7559603	10,2445147
	300141	109749		522027	127129
86.	1, 2028154	10, 0801990	101.	1, 8081630	10,2572376
	310074	110539		544617	128869
87.	1, 2338228	10, 0912529	102.	1, 8626247	10,2701245
	320519	111378		568605	130604
88.	1, 2658747	10, 1023907	103.	1, 9194852	10,2831849
	331508	112270		594116	132373
89.	1, 2990255	10, 1136177	104.	1, 9788968	10,2964222
	343078	113209		621261	134256
90.	1, 3333333	10, 1249386	105.	2, 0410229	10,3098478
	355268	114206		650185	136192
91.	1, 3688601	10, 1363592	106.	2, 1060414	10,3234670

v An. ver.	$t+\frac{1}{3}t^3$ Ar. Parab.	$l(t+\frac{1}{3}t^3)$ Lo. Ar. Par.	v An. ver.	$t+\frac{1}{3}t^3$ Ar. Parab.	$l(t+\frac{1}{3}t^3)$ Lo. Ar. Par.
106.	2, 1060414	10,3234670	120.	3, 4641016	10,5395906
	681009	138210		1439648	176840
107.	2, 1741423	10,3372880	121.	3, 6080664	10,5572746
	715916	140702		1531254	180508
108.	2, 2457339	10,3513582	122.	3, 7611918	10,5753254
	747051	142120		1630816	184339
109.	2, 3204390	10,3655702	123.	3, 9242734	10,5937593
	786624	144783		1739121	188323
110.	2, 3991014	10,3800485	124.	4, 0981855	10,6125916
	826836	147157		1857152	192478
111.	2, 4817850	10,3947642	125.	4, 2839007	10,6318394
	869928	149623		1985965	196806
112.	2, 5687778	10,4097265	126.	4, 4824972	10,6515200
	916132	152190		2126822	201322
113.	2, 6603910	10,4249455	127.	4, 6951794	10,6716522
	965746	154857		2281094	206031
114.	2, 7569656	10,4404312	128.	4, 9232888	10,6922553
	1019103	157641		2450375	210947
115.	2, 8588759	10,4561953	129.	5, 1683263	10,7133500
	1076486	160525		2636466	216076
116.	2, 9665245	10,4722478	130.	5, 4319729	10,7349576
	1138350	163535		2841418	221434
117.	3, 0803595	10,4886013	131.	5, 7161147	10,7571010
	1205088	166665		3067691	227035
118.	3, 2008683	10,5052678	132.	6, 0228838	10,7798045
	1277168	169919		3317927	232890
119.	3, 3285851	10,5222597	133.	6, 3546765	10,8030935
	1355165	173309		3593349	238885
120.	3, 4641016	10,5395906	134.	6, 7140114	10,8269820

v An. ver.	$t+\frac{1}{3}t^3$ Ar. Parab.	$l(t+\frac{1}{3}t^3)$ Lo. Ar. Par.	v An. ver.	$t+\frac{1}{3}t^3$ Ar. Parab.	$l(t+\frac{1}{3}t^3)$ Lo. Ar. Par.
134.	6, 7140114	10,8269820	148.	17, 625464	11, 2461405
	3905592	245558		1, 608797	379350
135.	7, 1045706	10,8515378	149.	19, 234261	11, 2840755
	4246883	252144		1, 824706	393616
136.	7, 5292589	10,8767522	150.	21, 058967	11, 3234371
	4630260	259188		2, 078751	408835
137.	7, 9922849	10,9026710	151.	23, 137718	11, 3643206
	5059412	266572		2, 379354	425102
138.	8, 4982261	10,9293282	152.	25, 517072	11, 4068308
	5541169	274327		2, 737148	442525
139.	9, 0523430	10,9567609	153.	28, 254220	11, 4510833
	6083643	282480		3, 165844	461238
140.	9, 6607073	10,9850089	154.	31, 420064	11, 4972071
	669622	291052		3, 683004	481379
141.	10, 330329	11, 0141141	155.	35, 103068	11, 5453450
	739010	300076		4, 311613	503130
142.	11, 069339	11, 0441217	156.	39, 414681	11, 5956580
	817891	309590		5, 081856	526683
143.	11, 887230	11, 0750807	157.	44, 496537	11, 6483263
	907868	319629		6, 034015	552278
144.	12, 795098	11, 1070436	158.	50, 530552	11, 7035541
	1, 010869	330233		7, 222367	580197
145.	13, 805967	11, 1400669	159.	57, 752919	11, 7615738
	1, 129269	341451		8, 720981	610774
146.	14, 935236	11, 1742120	160.	66, 473900	11, 8226512
	1, 265913	353338		10, 632908	644416
147.	16, 201149	11, 2095458	161.	77, 106808	11, 8870928
	1, 424315	365947		13, 102930	681607
148.	17, 625464	11, 2461405	162.	90, 209738	11, 9552535

v An. ver.	$t + \frac{1}{3} t^3$ Ar. Parab.	$l(t + \frac{1}{3} t^3)$ Lo. Ar. Par.	v An. ver.	$t + \frac{1}{3} t^3$ Ar. Parab.	$l(t + \frac{1}{3} t^3)$ Lo. Ar. Par.
162.	90, 209738	11, 9552535	171.	696, 50162	12,8429220
	16, 339289	722960		292, 67111	1523501
163.	106,549027	12,0275495	172.	989, 17273	12,9952721
	20, 64650	769223		484, 0461	1729950
164.	127, 19553	12,1044718	173.	1473, 2188	13,1682671
	26, 48042	821340		861, 6103	1999880
165.	153, 67595	12,1866058	174.	2334, 8291	13,3682551
	34, 54088	880526		1693, 0339	2368196
166.	188, 21683	12,2746584	175.	4027, 8630	13,6050747
	45, 93237	948342		3802, 5759	2887114
167.	234, 14920	12,3694926	176.	7830, 4389	13,8937861
	62, 45521	1026849		10737, 522	3749781
168.	296, 60441	12,4721775	177.	18567, 960	14,2687642
	87, 15848	1118855		44167, 208	5287469
169.	383, 76289	12,5840630	178.	62735, 168	14,7975111
	125, 43102	1228203		438917, 01	9028915
170.	509, 19391	12,7068833	179.	501652, 17	15,7004026
	187, 30771	1360387		∞	∞
171.	696, 50162	12,8429220	180.	infinitum.	infinitum.

Tabula I.

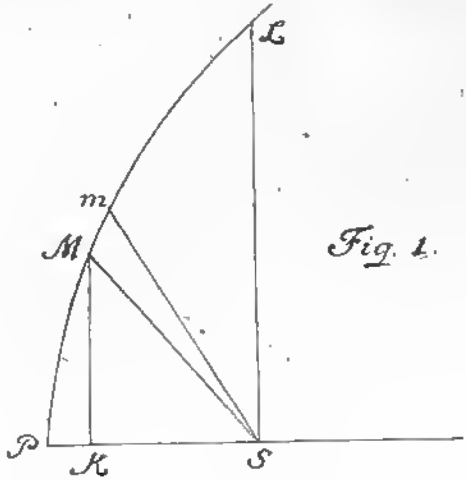


Fig. 1.

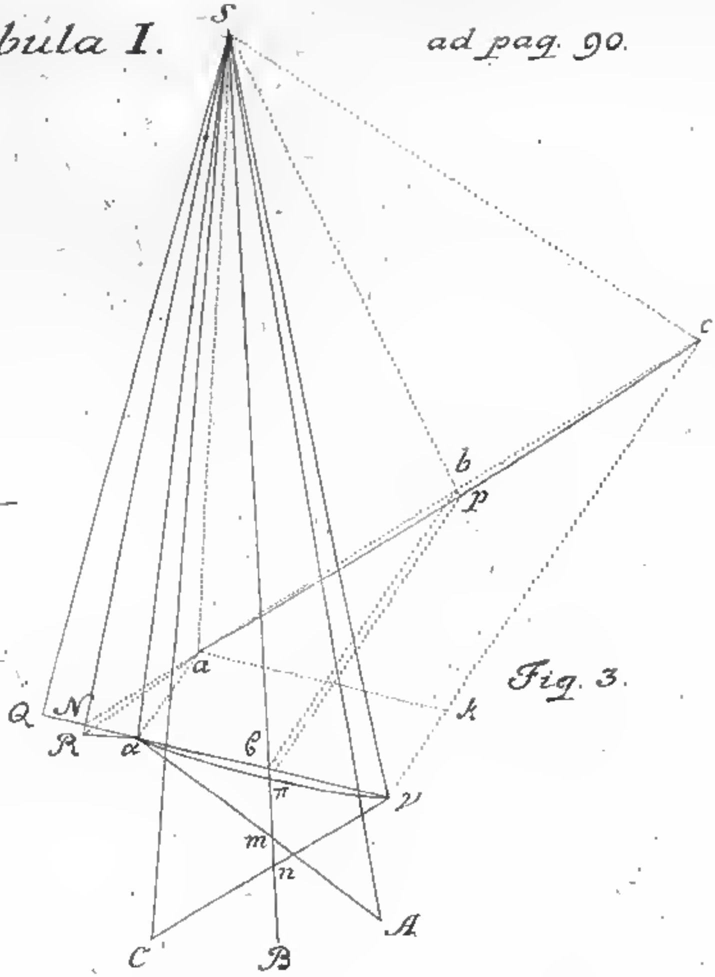


Fig. 3.

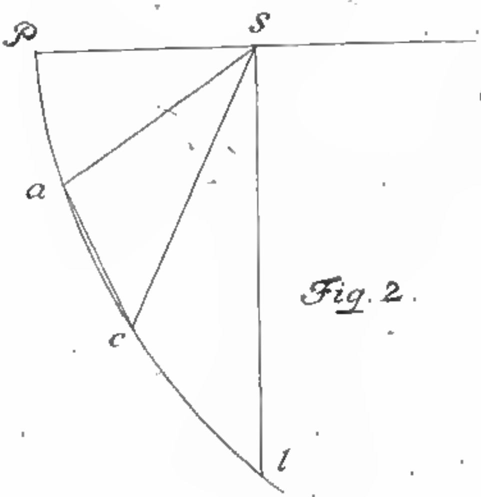


Fig. 2.

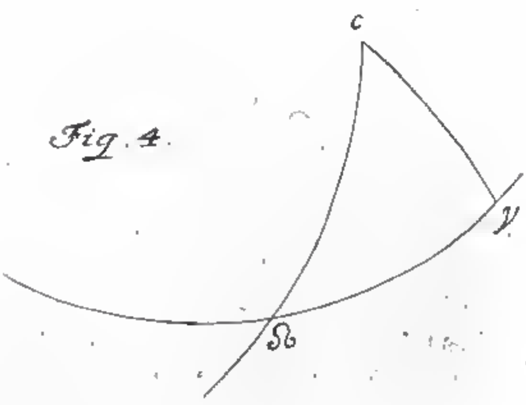


Fig. 4.

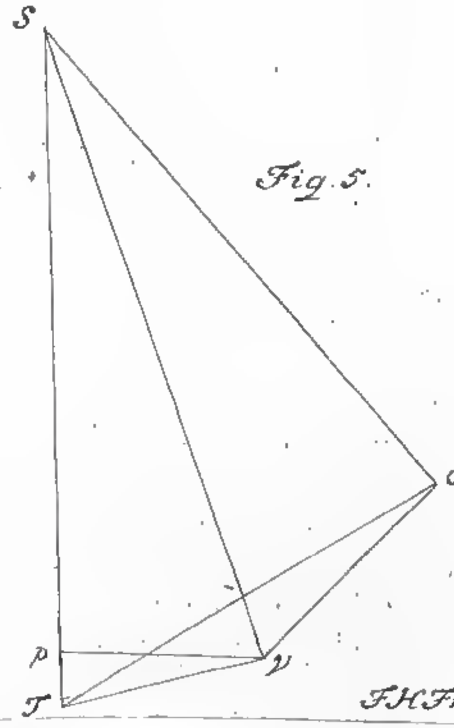


Fig. 5.

F.H. Frisch sc.

Num. II.

Ejusdem

THEOREMATA
circa reductionem formularum integralium ad quadraturam circuli.

Lemma 1.

1. In circulo cujus radius eſt $= 1$, & ſemiperipheria $= \pi$ ſit anguli cujusvis s ſinus $= x$, erit eadem quantitas x ſinus omnium arcuum in hac ſerie infinita contentorum:

s; $\pi - s$; $2\pi + s$; $3\pi - s$; $4\pi + s$; $5\pi - s$; &c. Præterea vero x erit ſinus omnium arcuum negativorum in hac ſine contentorum.

$-\pi - s$; $-2\pi + s$; $-3\pi - s$; $-4\pi + s$; $-5\pi - s$; &c.

Corollarium 1.

2. Si igitur i denotet numerum quemcunque integrum affirmativum, erit tam arcuum omnium in hac expreſſione contentorum $\pm 2i\pi + s$, quam arcuum in hac expreſſione $\pm (2i+1)\pi - s$ contentorum idem ſinus communis x.

Coroll. 2.

3. Cum angulorum negative ſumtorum ſinus fiant negativi, erit angulorum in hac forma $\pm 2i\pi - s$ contentorum ſinus $= -x$; angulorumque in hac forma, $\pm (2i+1)\pi + s$ contentorum ſinus $= -x$ ſiquidem anguli s fuerit ſinus $= +x$.

Lemma 2.

4. In circulo cujus radius $= 1$, & ſemiperipheria $= \pi$, ſit anguli cujusvis s coſinus $= y$, erit eadem quantitas y coſinus omnium angulorum affirmativorum in hac ſerie contentorum.

$s;\ 2\pi - s;\ 2\pi + s;\ 4\pi - s;\ 4\pi + s;\ 6\pi - s;$ &c.

pariterque eadem quantitas y erit coſinus omnium angulorum negativorum in hac ſerie contentorm.

$-s; 2\pi + s;\ -2\pi - s;\ -4\pi + s;\ -4\pi - s;\ -6\pi + s;$ &c.

Coroll. 1.

5. Si igitur i denotet numerum quemcunque integrum affirmativum, erit omnium arcuum in hac expreſſione generali $\pm 2 i \pi \pm s$ contentorum idem communis coſinus $= y$.

Coroll. 2.

6. Quoniam anguli duobus rectis ſeu arcu π aucti ſive minuti coſinus fit negativus, erit omnium angulorum in hac forma $\pm (2i + 1)\pi \pm s$ idem coſinus $= -y$, ſiquidem anguli s coſinus fuerit $= + y$.

Lemma 3.

7. Iisdem poſitis, ſi t ſit tangens anguli s, erit quoque t tangens omnium angulorum tam affirmativorum quam negativorum in his duabus ſeriebus contentorum.

$s;\ \pi + s;\ 2\pi + s;\ 3\pi + s;\ 4\pi + s;\ 5\pi + s;$ &c.

$-\pi + s; -2\pi + s; -3\pi + s; -4\pi + s; -5\pi + s;$ &c.

Coroll.

8. Denotante ergo i numerum quemcunque affirmativum, erit omnium angulorum in hac expreſſione $\pm i\pi + s$ conten-

contentorum eadem communis tangens t; angulorum vero $\pm i\pi - s$ tangens erit $= -t$; ſiquidem anguli s tangens ſit $= +t$.

Problema.

9. Invenire radices hujus æquationis infinitæ

$$x = z - \frac{z^3}{1.2.3.} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5.} - \frac{z^7}{1.2.3.\ldots 7} + \&c.$$

Solutio.

Si z denotet arcum circuli radii $= 1$, erit x ipſius ſinus. Ponamus ergo arcum, cujus ſinus ſit $= x$, eſſe s, erunt infiniti ipſius z valores in his duabus ſeriebus contenti.

$$s;\ \pi - s;\ 2\pi + s;\ 3\pi - s;\ 4\pi + s;\ 5\pi - s;\ \&c.$$
$$-\pi - s;\ -2\pi + s;\ -3\pi - s;\ -4\pi + s;\ -5\pi - s;\ \&c.$$

Q. E. J.

Coroll. 1.

10. Si igitur æquatio propoſita in hanc formam transmutetur.

$$0 = 1 - \frac{z}{1.x} + \frac{z^3}{1.2.3.x} - \frac{z^5}{1.2.3.4.5\,x} + \frac{z^7}{1.2.\ldots 7.x} - \&c.$$

ejus habebuntur factores numero infiniti ſequentes

$$\left(1-\frac{z}{s}\right)\left(1-\frac{z}{\pi-s}\right)\left(1+\frac{z}{\pi+s}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi+s}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi-s}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi-s}\right)\left(1+\frac{z}{3\pi+s}\right)$$

&c. in quibus factoribus lex progreſſionis facile perſpicitur.

Coroll. 2.

11. Cum igitur coefficiens termini ſecundi in producto æquetur ſummæ coefficientium ipſius z in omnibus factoribus erit.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\pi - s} - \frac{1}{\pi + s} - \frac{1}{2\pi - s} + \frac{1}{2\pi + s} + \frac{1}{3\pi - s} - \&c.$$

Coroll. 3.

12. Sit $s = \frac{m}{n}\pi$; ita ut fiat $x =$ ſin A. $\frac{m}{n}\pi$ erit ſerie per $\frac{\pi}{n}$ multiplicata; $\frac{\pi}{nx} =$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \&c.$$

Coroll. 4.

13. Quoniam coefficiens ipſius z^2 in producto, qui eſt $= 0$, æquatur ſummæ factorum ex binis coefficientibus ipſius z in factoribus, hæc vero ſumma biſſumta æqualis eſt quadrato ſummæ iſtorum coefficientium demta ſumma quadratorum eorundem, erit:

$$\frac{1}{xx} = \frac{1}{ss} + \frac{1}{(\pi-s)^2} + \frac{1}{(\pi+s)^2} + \frac{1}{(2\pi-s)^2} + \frac{1}{(2\pi+s)^2} + \&c.$$

Coroll. 5.

14. Poſito ergo iterum $s = \frac{m}{n}\pi$, ut ſit $x =$ ſin A. $\frac{m\pi}{n}$, prodibit iſta ſummatio: $\frac{\pi\pi}{nnxx} =$

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \&c.$$

Scholion.

15. Poſſem hoc modo ultra progredi, atque ſummas altiorum poteſtatum determinare, quoniam vero hoc alibi jam feci, atque ad inſtitutum noſtrum hæ ſeries ſufficiunt; ulteriori inveſtigationi ſuperſedebo.

Proble-

Problema 2.

16. Invenire radices hujus æquationis infinitæ $y = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2\ldots.6} + \frac{z^8}{1.2\ldots.8} -$ &c.

Solutio.

Si z denotet arcum in circulo cujus radius $= 1$, erit y hujus arcus coſinus. Quodſi ergo capiatur arcus s cujus coſinus ſit $= y$; continebuntur innumerabiles ipſius z valores in binis ſequentibus ſeriebus:

$+s$; $+2\pi - s$; $+2\pi + s$; $+4\pi - s$; $+4\pi + s$; &c.
$-s$; $-2\pi + s$; $-2\pi - s$; $-4\pi + s$; $-4\pi - s$; &c.

Q. E. J.

Coroll. 1.

17. Si igitur æquatio propoſita in hanc formam transmutetur:

$$0 = 1 - \frac{z^2}{1.2(1-y)} + \frac{z^4}{1.2.3.4.(1-y)} - \frac{z^6}{1.2\ldots.6(1-y)} + \text{\&c.}$$

ejus habebuntur factores numero infiniti ſequentes.

$$\left(1 - \frac{zz}{ss}\right)\left(1 - \frac{zz}{(2\pi - s)^2}\right)\left(1 - \frac{zz}{(2\pi + s)^2}\right)\left(1 - \frac{zz}{(4\pi - s)^2}\right)\left(1 - \frac{zz}{(4\pi + s)^2}\right)\text{\&c.}$$

Coroll. 2

18. Cum igitur in producto coefficiens ipſius zz æqualis ſit ſummæ coefficientium ipſius zz in factoribus habebitur ſequentis ſeriei ſummatio:

$$\frac{1}{2(1-y)} = \frac{1}{ss} + \frac{1}{(2\pi - s)^2} + \frac{1}{(2\pi + s)^2} + \frac{1}{(4\pi - s)^2} + \frac{1}{(4\pi + s)^2} + \text{\&c.}$$

Coroll.

Coroll. 3.

19. Ponatur $s = \frac{m}{n}\pi$, ut ſit $y =$ coſ. A. $\frac{m}{n}\pi$ & $1 - y$ $= 2\left(\text{ſin.}\ \frac{m}{2n}\pi\right)^2$; erit $\frac{\pi\pi}{2nn(1-y)} = \frac{\pi\pi}{4nn(\text{ſin A.}\frac{m}{2n}\pi)^2}$

$$= \frac{1}{mm} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2} + \frac{1}{(4n+m)^2} + \&c.$$

quæ congruit cum §. 14. ſi modo hic loco $2n$ ſcribatur n,

Problema 3.

20. Invenire radices ipſius z hujus æquationis infinitæ:

$$t = \frac{z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.\ldots 7} + \&c.}{1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.\ldots 6} + \&c.}$$

Solutio.

Si z denotet arcum circuli, cujus radius $= 1$, erit t tangens hujus arcus, ſi ergo ſumatur arcus s in hoc circulo cujus tangens ſit $= t$, erunt infiniti ipſius z valores ſequentes.

$s;\ \pi + s;\ 2\pi + s;\ 3\pi + s;\ 4\pi + s;\ 5\pi + s;$ &c.
$-\pi + s;\ -2\pi + s;\ -3\pi + s;\ -4\pi + s;\ -5\pi + s;$ &c.

Q. E. J.

Coroll. 1.

21. Reducatur æquatio propoſita ad hanc formam

$$0 = 1 - \frac{z}{t} - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3.t} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^5}{1.2.3.4.5t} + \&c.$$

ejusque

ejusque factores ſimplices erunt ſequentes.

$$\left(1-\frac{z}{s}\right)\left(1+\frac{z}{\pi-s}\right)\left(1-\frac{z}{\pi+s}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi-s}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi+s}\right)\left(1+\frac{z}{3\pi-s}\right)\&c$$

Coroll. 2.

22. Cum igitur coefficiens ipſius z in æquatione æqualis ſit ſummæ coefficientium ipſius z in ſingulis factoribus; erit

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{s}-\frac{1}{\pi-s}+\frac{1}{\pi+s}-\frac{1}{2\pi-s}+\frac{1}{2\pi+s}-\frac{1}{3\pi-s}+$$

&c.

Coroll. 3.

23. Ponatur $s=\frac{m}{n}\pi$ ut ſit $t=$ tang. A $\frac{m}{n}\pi$ $=$ $\frac{x}{y}$ ſi ſit $x=$ ſin. A $\frac{m}{n}\pi$ & $y=$ coſ. A$\frac{m}{n}\pi$; atque prodibit ſequentis ſeriei ſummatio: $\frac{\pi}{nt}=\frac{\pi y}{nx}=$

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\&c.$$

Coroll. 4.

24. Summa quadratorum ſingulorum terminorum ſeriei (22) æqualis eſt quadrato ſummæ ipſorum $\frac{1}{tt}$ demta duplici ſumma factorum ex binis, hoc eſt -1 erit ergo ſumma quadratorum $=\frac{1}{tt}+1=\frac{yy}{xx}+1=\frac{1}{xx}$. Prodibit ergo uti in §. 13. hæc ſummatio.

$$\frac{1}{xx}=\frac{1}{ss}+\frac{1}{(\pi-s)^2}+\frac{1}{(\pi+s)^2}+\frac{1}{(2\pi-s)^2}+\frac{1}{(2\pi+s)^2}$$

$+$ &c.

 Theore-

THEOREMA. I.

25. Denonante π ſemiperipheriam circuli, cujus radius $=1$, ſi fuerit $x =$ ſin A. $\frac{m}{n}\pi$; erit $\frac{\pi(p+qy)}{nx} = \frac{p+q}{m} + \frac{p-q}{n-m} - \frac{p+q}{n+m} - \frac{p-q}{2n-m} + \frac{p+q}{2n+m} + \frac{p-q}{3n-m} - \frac{p+q}{3n+m} -$ &c.

Demonſtratio.

Si ſeries §. 12. inventa multiplicetur per p erit

$$\frac{\pi p}{nx} = \frac{p}{m} + \frac{p}{n-m} - \frac{p}{n+m} - \frac{p}{2n-m} + \frac{p}{2n+m} + \&c.$$

Et, ſi ſeries §. 23. multiplicetur per q erit

$$\frac{\pi qy}{nx} = \frac{q}{n} - \frac{q}{n-m} + \frac{q}{n+m} - \frac{q}{2n-m} + \frac{q}{2n+m} - \&c.$$

Addantur hæ duæ ſeries, prodibitquæ ſeries propoſita, cujus propterea ſumma eſt $= \frac{\pi(p+qy)}{nx}$. Q. E. D.

Coroll. I.

26. ſumatur $p = q$, prodibit iſta ſummatio:

$$\frac{\pi(1+y)}{2nx} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{4n-m} + \frac{1}{4n+m} - \&c.$$

at eſt $\frac{x}{1+y}$ tang. $\frac{m}{2n}\pi$, quæ ergo poſito n loco $2n$ congruit cum ſerie §. 23. inventa.

Coroll. 2.

27. Si $q = -p$; prodit hæc ſummatio:

$$\frac{\pi(1-y)}{2nx} = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \&c.$$

at eſt

at eſt $\frac{1-y}{x}$ = tang. A. $\frac{m}{2n}\pi$; hincque $\frac{x}{1-y}$ = tang. A. $\left(\frac{-m}{2n}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$ = tang. A. $\frac{(n-m)}{2n}\pi$, quæ ſeries denuo ſcripto m loco $n-m$ ad præcedentem reducitur.

Problema 4.

28. Invenire ſummam hujus ſeriei:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} -$$

&c. per formulam integralem.

Solutio.

Tribuantur ſingulis fractionibus numeratores, qui ſint poteſtates ipſius z, quarum exponentes denominatoribus æquentur; habebiturque hæc ſeries.

$$\frac{z^m}{m} + \frac{z^{n-m}}{n-m} - \frac{z^{n+m}}{n+m} - \frac{z^{2n-m}}{2n-m} + \frac{z^{2n+m}}{2n+m} + \&c.$$

quæ facto $z = 1$ in illam abibit. Ponatur ſumma hujus ſeriei $= s$; ac ſumtis differentialibus erit

$$\frac{z\,ds}{dz} = z^m + z^{n-m} - z^{n+m} - z^{2n-m} + z^{2n+m} + z^{3n-m} -$$

&c. quæ ſeries compoſita eſt ex duabus geometricis eritque ideo ejus ſumma $= \frac{z^m}{1+z^n} + \frac{z^{n-m}}{1+z^n}$. Habemus ergo

$$\frac{z\,ds}{dz} = \frac{z^m + z^{n-m}}{1+z^n} \;\&\; ds = \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1+z^n}\,dz$$

Conſequenter $s = \int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1+z^n}\,dz$, hujus itaque

 inte-

integralis valor caſu quo $z = 1$, dabit ſummam ſeriei propoſitæ. Q. E. J.

Coroll. 1.

29. Quoniam igitur ſeriei propoſitæ ſumma eſt

$$\frac{\pi}{nx} = \frac{\pi}{n\,\text{ſin. A.}\,\frac{m}{n}\pi}\text{; erit }\frac{\pi}{n\,\text{ſin. A.}\,\frac{m}{n}\pi} = \int\frac{z^{m-1}+z^{n-m-1}}{1+z^n}dz$$

ſi poſt integrationem ponatur $z = 1$. Hoc ergo caſu integrale formulæ $\int\frac{z^{m-1}+z^{n-m-1}}{1+z^n}dz$ ope circuli poteſt exhiberi.

Coroll. 2.

30. Ponendo ergo loco m & n numeros definitos, habebuntur ſequentes integrationes caſu $z = 1$:

ſi $m = 1$; $n = 2$ erit $\frac{\pi}{2} = \int\frac{2\,dz}{1+zz}$

ſi $m = 1$; $n = 3$ erit $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \int\frac{1+z}{1+z^3}dz = \int\frac{dz}{1-z+zz}$

ſi $m = 1$; $n = 4$ erit $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int\frac{1+zz}{1+z^4}dz$,

ſi $m = 1$; $n = 6$ erit $\frac{\pi}{3} = \int\frac{1+z^4}{1+z^6}dz$,

quæ omnia integratione actu inſtituta veritati conſentanea deprehenduntur.

Problema. 5.

31. Invenire ſummam hujus ſeriei:

$\frac{1}{m}$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \frac{1}{3n+m}$$
— &c. per formulam integralem.

Solutio.

Conjungantur cum his fractionibus numeratores idonei, ut ante fecimus, ac ponatur:

$$s = \frac{z^{m}}{m} - \frac{z^{n-m}}{n-m} + \frac{z^{n+m}}{n+m} - \frac{z^{2n-m}}{2n-m} + \frac{z^{2n+m}}{2n+m} - \&c.$$

erit utique facto $z = 1$, valor ipſius s ſumma ſeriei propoſitæ. Inſtituatur jam differentiatio, ac prodibit

$$\frac{z\,ds}{dz} = z^{m} - z^{n-m} + z^{n+m} - z^{2n-m} + z^{2n+m} - \&c.$$

cujus ſeriei ſumma quia exhiberi poteſt, habebitur.

$$\frac{z\,ds}{dz} = \frac{z^{m} - z^{n-m}}{1-z^{n}}, \text{ unde fit } s = \int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1-z^{n}}\,dz$$

Hujus ergo formulæ integralis valor caſu $z = 1$ dabit ſummam ſeriei propoſitæ. Q. E. J.

Coroll. 1.

32. Per §. 23. eſt ſeriei propoſitæ ſumma $=$

$$\frac{\pi}{nt} = \frac{\pi y}{nx} = \frac{\pi \text{ coſ. A.} \frac{m}{n}\pi}{n \text{ ſin A.} \frac{m}{n}\pi}.$$ Quamobrem erit

$$\frac{\pi \text{ coſ. A} \frac{m}{n}\pi}{n \text{ ſin. A.} \frac{m}{n}\pi} = \int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1-z^{n}}\,dz$$ caſu quo poſt integrationem ponitur $z = 1$.

 Co-

Coroll. 2.

33. Caſus ergo ſimpliciores ita ſe habebunt.

ſi $m = 1, n = 3$ erit $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \int \frac{(1-z)dz}{1-z^3} = \int \frac{dz}{1+z+zz}$

ſi $m = 1, n = 4$ erit $\frac{\pi}{4} = \int \frac{(1-z^2)dz}{1-z^4} = \int \frac{dz}{1+z^2}$

ſi $m = 1; n = 6$ erit $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \int \frac{(1-z^4)dz}{1-z^6} = \int \frac{(1+zz)dz}{1+zz+z^4}$

quarum formularum congruentia cum veritate poſt integrationem actu inſtitutam ſponte patet.

Scholion.

34. Si in binis ſeriebus nunc tractatis bini termini in unum colligantur, orientur ſequentes ſummationes.

$$\frac{\pi}{n \sin A. \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} + \frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} + \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2}$$

$+$ &c.

$$\frac{\pi \cos A. \frac{m}{n}\pi}{n \sin. A. \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} - \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2}$$

$-$ &c.

His ergo ordinatis habebimus duas ſequentes ſeries notatu, maxime dignas:

$$\frac{\pi}{2mn \sin A. \frac{m}{n}\pi} - \frac{1}{2mm} = \frac{1}{n^2-m^2} - \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} - \frac{1}{16n^2-m^2}$$

$+$ &c.

$\frac{1}{2mm}$

$$\frac{1}{2mm} - \frac{\pi \operatorname{coſ.} A. \frac{m}{n}\pi}{2nm \operatorname{ſin} A. \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} +$$

$\frac{1}{16n^2-m^2} +$ &c. quæ ſi invicem addantur dabunt:

$$\frac{\pi(1 - \operatorname{coſ.} A. \frac{m}{n}\pi)}{4mn \operatorname{ſin.} A. \frac{m}{n}\pi} = \frac{\pi \operatorname{coſ.} A. \frac{m}{2n}\pi}{4mn \operatorname{ſin.} A. \frac{m}{2n}\pi} =$$

$$\frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{25n^2-m^2} + \frac{1}{49n^2-m^2} + \text{\&c.}$$

Hasque ſeries ante aliquot annos ex principiis longe diverſis ſum conſecutus.

THEOREMA. 2.

35. Summa hujus ſeriei quadratorum.

$$\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(n-m)^2} - \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} - \frac{1}{(3n-m)^2} - \text{\&c.}$$

$$\text{eſt} = \frac{\pi^2 \operatorname{coſ.} A. \frac{m}{n}\pi}{nn(\operatorname{ſin.} A. \frac{m}{n}\pi)^2}$$

Demonſtratio.

In §. 12. vidimus eſſe $\frac{\pi}{n \operatorname{ſin.} A. \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}$

$$- \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \text{\&c.}$$

quæ

quæ æqualitas cum ſemper habeat locum, quicquid ſit m, differentialia quoque æqualia eſſe debent. Differentiemus ergo tam ſeriem, quam ipſius ſummam, poſita m variabili, eruntque differentialia quoque æqualia. Habebitur autem utrinque per dm diviſo:

$$\frac{-\pi^2 \text{coſ.A.}\frac{m}{n}\pi}{nn\,(\text{ſin. A.}\frac{m}{n}\pi)^2} = \frac{-1}{m^2} + \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} - \frac{1}{(2n-m)^2} - \frac{1}{(2n+m)^2}$$

$+$ &c.

Mutentur ſigna, atque habebitur ſumma ſeriei quadratorum propoſitæ. Q. E. J.

Coroll. 1.

36. Evolvamus aliquot caſus ſimpliciores, ſitque

$m=1$; $n=2$; erit ſin A. $\frac{m}{n}\pi = 1$ & coſ. A. $\frac{m}{n}\pi = 0$, unde

$0 = 1 - 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{25} - \frac{1}{49} +$ &c.

ſit $m=1$; $n=3$; erit ſin A. $\frac{m}{n}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ & coſ. A. $\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{2}$ unde

$\frac{2\pi\pi}{27} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} +$ &c.

ſit $m=1$; $n=4$ erit ſin A. $\frac{m}{n}\pi =$ coſ. A. $\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ unde:

$\frac{\pi\,\pi}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \frac{1}{121} - \frac{1}{169} +$ &c.

Coroll. 2.

37. Multiplicemus ſeriem $\frac{2\pi\pi}{27} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} +$ &c. in qua quadrata per ternarium divi-

diviſibilia deſunt, per $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} +$ &c. ut omnia quadrata occurrant; eritque $\frac{\pi\pi}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} -$ &c. cujus veritas jam alibi a me eſt demonſtrata.

Coroll. 3.

38. Cum ſit ex §. 14. $\frac{\pi\pi}{nnxx} = \frac{\pi\ \pi}{nn(\text{ſin.}\frac{m}{n}\pi)^2} =$

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \&c.$$

erit his ſeriebus additis $\frac{\pi\pi(1+\text{coſ.A}\frac{m}{n}\pi)}{2nn(\text{ſin.}\frac{m}{n}\pi)^2} =$

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2} + \frac{1}{(4n+m)^2} + \&c.$$

quæ ſeries ſcribendo n loco $2n$ ad illam reducitur, eſt enim $\frac{1+\text{coſ. A}\frac{m}{n}\pi}{(\text{ſin.A}\frac{m}{n}\pi)^2} = \frac{1}{2(\text{ſin. A}\frac{m}{2n}\pi)^2}$.

Scholion.

39. Summatio ergo in hac propoſitione demonſtrata directe deduci potuiſſet ex ſummatione ſeriei §. 14. datæ. Cum enim ſit

$$\frac{\pi\ \pi}{nn(\text{ſin.A}\frac{m}{n}\pi)^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2}$$

$+$ &c.

erit quoque ſcribendo $2n$ loco n; $\frac{\pi\pi}{4nn(\text{ſin.}A\frac{m}{2n}\pi)^2} =$

$$\frac{\pi\pi(1+\text{coſ.}A.\frac{m}{n}\pi)}{2nn(\text{ſin.}A\frac{m}{n}\pi)^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2}$$

$+ \frac{1}{(4n+m)^2} +$ &c. a cujus duplo ſi illa ſubtrahatur, remanebit propoſita

$$\frac{\pi\pi\,\text{coſ.}A\frac{m}{n}\pi}{nn(\text{ſin.}A\frac{m}{n}\pi)^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{(n-m)^2} - \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(2n-m)^2}$$

$+ \frac{1}{(2n+m)^2} -$ &c.

ſimili autem modo ex ſerie §. 23, quæ ob ſigna alternantia maxime videtur regularis deduci poteſt ſeries §. 12. exhibita.

Cum enim ſit $\frac{\pi\,\text{coſ.}A.\frac{m}{n}\pi}{n\,\text{ſin.}A\frac{m}{n}\pi} =$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{\&c.}$$

erit, ſi $2n$ loco n ſcribatur $\frac{\pi\,\text{coſ.}A\frac{m}{2n}\pi}{2n\,\text{ſin.}A\frac{m}{2n}\pi} = \frac{\pi(1+\text{coſ.}A\frac{m}{n}\pi)}{2n\,\text{ſin.}A.\frac{m}{n}\pi}$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{4n-m} + \frac{1}{4n+m} - \text{\&c.}$$

Ab hujus duplo ſubtrahatur illa ſeries, eritque

π

$$\frac{\pi}{n \sin A.\frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \&c.$$

quæ eſt ipſa ſeries §. 12. inventa. Simili autem modo formulæ integrales, quæ pro his ſummis ſunt inventæ ad ſe invicem reducuntur. Cum enim (32) ſit

$$\frac{\pi \operatorname{cof}. A\frac{m}{n}\pi}{n \sin. A\frac{m}{n}\pi} = \int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} dz$$ erit quoque $$\frac{\pi \operatorname{cof}. A\frac{m}{2n}\pi}{2n \sin. A\frac{m}{2n}\pi}$$

$$= \frac{\pi(1 + \operatorname{cof}. A\frac{m}{n}\pi)}{2n \sin. A\frac{m}{n}\pi} = \int \frac{z^{m-1} - z^{2n-m-1}}{1 - z^{2n}} dz$$; ab hujus duplo ſubtrahatur prior, erit $\frac{\pi}{n \sin. A\frac{m}{n}\pi} =$

$$\int \frac{2z^{m-1} - 2z^{2n-m-1}}{1 - z^{2n}} dz - \int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} dz =$$

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{n+m-1} + z^{n-m-1} - z^{2n-m-1}}{1 - z^{2n}} dz = \int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1 + z^n} dz$$

quæ eſt ipſa integratio §. 29. inventa. Ex quibus perſpicuum eſt, omnia, quæ hactenus ſunt eruta, deduci potuiſſe ex hac ſummatione $\frac{\pi \operatorname{cof}. A\frac{m}{n}\pi}{n \sin. A\frac{m}{n}\pi}$

$$= \int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} dz = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m}$$

+

$+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}-$ &c. Ex qua per differentiationem naſcitur hæc $\frac{\pi\pi}{nn(\text{ſin. A}\frac{m}{n}\pi)^2} =$

$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(n-m)^2}+\frac{1}{(n+m)^2}+\frac{1}{(2n-m)^2}+\frac{1}{(2n+m)^2}+$ &c. quæ §. 14. jam eſt inventa.

Problema 5.

40. Invenire differentialia primi, ſecundi, ſequentiumque altiorum ordinum hujus quantitatis

$\frac{\pi\ \text{coſ. A.}\frac{m}{n}\pi}{n\ \text{ſin. A.}\frac{m}{n}\pi}$ poſito m variabili.

Solutio.

Ponamus brevitatis gratia ſin. $A\frac{m}{n}\pi = x$ & coſ. $A.\frac{m}{n}\pi = y$, erit primo $y = V(1-xx)$; tum vero erit $dx = \frac{\pi dm}{n}y = \frac{\pi y}{n}dm$; & $dy = -\frac{\pi x}{n}dm$. Vocetur quoque quantitas propoſita, cujus differentialia quæruntur,

$\frac{\pi\,\text{coſ.A.}\frac{m}{n}\pi}{n\,\text{ſin.A.}\frac{m}{n}\pi} = V$, erit $V = \frac{\pi y}{nx}$.

Hinc ergo erit $dV = \frac{\pi(xdy-ydx)}{nxx} = \frac{-\pi\pi dm}{nnxx}$

ob

ob $xx + yy = 1$; ideoque $\frac{dV}{dm} = \frac{-\pi\pi}{nn} \cdot \frac{1}{xx}$ hujus porro ſumatur differentiale, eritque $\frac{ddV}{dm} = + \frac{\pi\pi}{nn} \cdot \frac{2dx}{x^3} = \frac{2\pi^3}{n^3} \cdot \frac{ydm}{x^3}$; ideoque $\frac{d^2V}{dm^2} = \frac{\pi^3}{n^3} \cdot \frac{2y}{x^3}$. Quodſi ſimili modo ſequentia differentialia computentur, ita ſe habebunt.

$$V = + \frac{\pi}{nx} \cdot y$$

$$\frac{dV}{dm} = - \frac{\pi^2}{n^2 x^2} \cdot 1$$

$$\frac{ddV}{dm^2} = + \frac{\pi^3}{n^3 x^3} \cdot 2y$$

$$\frac{d^3V}{dm^3} = - \frac{\pi^4}{n^4 x^4} (4yy + 2)$$

$$\frac{d^4V}{dm^4} = + \frac{\pi^5}{n^5 x^5} (8y^3 + 16y)$$

$$\frac{d^5V}{dm^5} = - \frac{\pi^6}{n^6 x^6} (16y^4 + 88y^2 + 16)$$

$$\frac{d^6V}{dm^6} = + \frac{\pi^7}{n^7 x^7} (32y^5 + 416y^3 + 272y)$$

$$\frac{d^7V}{dm^7} = - \frac{\pi^8}{n^8 x^8} (64y^6 + 1824y^4 + 2886y^2 + 272)$$

&c.

Lex progreſſionis ita ſe habet ut ſi fuerit

$$\frac{d^\nu V}{dm^\nu} = + \frac{\pi^{\nu+1}}{n^{\nu+1} x^{\nu+1}} (\alpha y^{\nu-1} + \beta y^{\nu-3} + \gamma y^{\nu-5} + \delta y^{\nu-7} + \varepsilon y^{\nu-9} + \&c.)$$

 futurus

futurus ſit ſequens differentiationis ordo:

$$\frac{d^{\nu+1}V}{dm^{\nu+1}} = \mp \frac{\pi^{\nu+2}}{n^{\nu+2}\,x^{\nu+2}}\Big(2\alpha y^{\nu} + (4\beta + (\nu-1)\,\alpha)\,y^{\nu-2} + (6\gamma + (\nu-3)\,\beta)\,y^{\nu-4} + (8\delta + (\nu-5)\,\gamma)\,y^{\nu-6} + (10\epsilon + (\nu-7)\,\delta)\,y^{\nu-8}$$

$+$ &c.) Differentialia igitur cujuscunque ordinis ex præcedentibus determinabuntur. Q. E. J.

Problema. 6.

41. Invenire ſummam hujus ſeriei:

$$\frac{1}{m^{\nu}} + \frac{1}{(m-n)^{\nu}} + \frac{1}{(m+n)^{\nu}} + \frac{1}{(m-2n)^{\nu}} + \frac{1}{(m+2n)^{\nu}} + \frac{1}{(m-3n)^{\nu}}$$

$+$ &c. ſingulis terminis ſeriei (23) inventæ, ad dignitatem quamcunque elevatis.

Solutio.

Si ponamus ſin $A\,\frac{m}{n}\pi = x$; coſ. $A\,\frac{m}{n}\pi = y$; atque $\frac{\pi y}{n x} = V$ erit ex §. 23:

$$V = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-2n} + \frac{1}{m+2n} + \frac{1}{m-3n}$$

$+$ &c. Quodſi jam poſito m variabili differentialia capiantur, prodibunt ſequentes ſummationes:

$$-\frac{dV}{1\,dm} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-n)^2} + \frac{1}{(m+n)^2} + \frac{1}{(m-2n)^2} + \frac{1}{(m+2n)^2} + \&c.$$

$$+\frac{ddV}{1.2\,dm^2} = \frac{1}{m^3} + \frac{1}{(m-n)^3} + \frac{1}{(m+n)^3} + \frac{1}{(m-2n)^3} + \frac{1}{(m+2n)^3} + \&c.$$

—

$$-\frac{d^3 V}{1.2.3\, dm^3} = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{(m-n)^4} + \frac{1}{(m+n)^4} + \frac{1}{(m-2n)^4}$$
$$+ \frac{1}{(m+2n)^4} + \&c.$$

$$+\frac{d^4 V}{1.2.3.4\, dm^4} = \frac{1}{m^5} + \frac{1}{(m-n)^5} + \frac{1}{(m+n)^5} + \frac{1}{(m-2n)^5}$$
$$+ \frac{1}{(m+2n)^5} + \&c.$$

&c.

Erit argo ſeriei gradus indefiniti propoſitæ:

$$\frac{1}{m^\nu} + \frac{1}{(m-n)^\nu} + \frac{1}{(m+n)^\nu} + \frac{1}{(m-2n)^\nu} + \frac{1}{(m+2n)^\nu} + \frac{1}{(m-3n)^\nu}$$
$$+ \&c.$$

ſumma $= \frac{\mp d^{\nu-1} V}{1.2.3. \ldots\ldots (\nu-1)\, dm^{\nu-1}}$. At problemate præcedente valorem ipſius $\frac{d^{\nu-1} V}{dm^{\nu-1}}$ exhibuimus; quamobrem quoque ſummæ harum ſerierum poteſtatum poterunt definiri.

Q. E. J.

Problema 7.

42\. Sinum anguli cujuscunque $\frac{m}{n}\pi$ per productum ex infinitis factoribus exhibere.

Solutio.

Cum ſit $\frac{\pi \operatorname{coſ.A.} \frac{m}{n}\pi}{n \operatorname{ſin.A.} \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m}$ + &c. tractetur m uti quantitas variabilis, ac multiplicetur

ubique

ubique per dm, erit $\frac{\pi dm}{n}$ coſ. $A\frac{m}{n}\pi = d.$ ſin. $A\frac{m}{n}\pi$

& hancobrem erit $\frac{\pi\, dm\, \text{coſ.}\, A.\frac{m}{n}\pi}{n\, \text{ſin}\, A\frac{m}{n}\pi} = \frac{d.\, \text{ſin.}\, A\frac{m}{n}\pi}{\text{ſin.}\, A\frac{m}{n}\pi}$

$= \frac{dm}{m} - \frac{dm}{n-m} + \frac{dm}{n+m} - \frac{dm}{2n-m} + \frac{dm}{2n+m} -$ &c.

unde integratione utrinque abſoluta erit l ſin. $A.\frac{m}{n}\pi =$ $lm + l(n-m) + l(n+m) + l(2n-m) + l(2n+m) +$ &c. $+ C$ Conſtans C ita eſſe debet comparata, ut facto $m = \frac{1}{2}n$, logarithmus ſinus fiat $= 0$, quippe quo caſu habetur ſinus totus. Hoc ergo modo conſtante C determinata erit $l\,\text{ſin.}\, A.\frac{m}{n}\pi = l\frac{2m}{n} + l\frac{2n-2m}{n} + l\frac{2n+2m}{3n} + l\frac{4n-2m}{3n} +$ $l\frac{4n+2m}{5n} +$ &c. Unde ſi tranſeamus ad numeros, habebimus:

$$\text{ſin.}\, A\frac{m}{n}\pi = \frac{2m}{n} \cdot \frac{2n-2m}{n} \cdot \frac{2n+2m}{3n} \cdot \frac{4n-2m}{3n} \cdot \frac{4n+2m}{5n} \cdot \text{\&c.}$$

Vel ſi binos factores in ſe ducamus, erit

$$\text{ſiu.}\, A\frac{m}{n}\pi = \frac{2m}{n} \cdot \frac{4nn-4mm}{3nn} \cdot \frac{16nn-4mm}{15nn} \cdot \frac{36nn-4mm}{35nn} \cdot \text{\&c.}$$

Q. E. J.

Coroll. I.

43. Si loco $2m$ ſcribamus m habebimus:

$$\text{ſin.}\, A\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n} \cdot \frac{2n-m}{n} \cdot \frac{2n+m}{3n} \cdot \frac{4n-m}{3n} \cdot \frac{4n+m}{5n} \cdot \text{\&c.}$$

$$\text{ſive ſin}\, A.\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n} \cdot \frac{4nn-mm}{4nn-nn} \cdot \frac{16nn-mm}{16nn-nn} \cdot \frac{36nn-mm}{36nn-nn} \cdot \text{\&c.}$$

Coroll. 2.

Coroll. 2

44. Quia eſt ſin A $\frac{m}{2n}\pi = $ coſ. A $\frac{(n-m)}{2n}\pi$, erit ſi $n-m$ ſcribamus loco m, ex ſerie inventa:

$$\text{coſ. A}\,\frac{m}{2n}\pi = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\frac{3n+m}{3n}\cdot\text{ \&c.}$$

$$\text{ſive coſ. A}\,\frac{m}{2n}\pi = \frac{nn-mm}{nn}\cdot\frac{9nn-mm}{9nn}\cdot\frac{25nn-mm}{25nn}\cdot\text{ \&c.}$$

Coroll. 3.

45. Quoniam eſt ſin A $\frac{m}{n}\pi = 2$ ſin A $\frac{m}{2n}\pi$. coſ. A $\frac{m}{2n}\pi$ ſi ſin A. $\frac{m}{n}\pi$ dividamus per 2 ſin A $\frac{m}{2n}\pi$, habebimus

$$\text{coſ. A}\frac{m}{2n} = \frac{2n-2m}{2n-m}\cdot\frac{2n+2m}{2n+m}\cdot\frac{4n-2m}{4n-m}\cdot\frac{4n+2m}{4n+m}\cdot$$

&c. & diviſo ſin A $\frac{m}{n}\pi$ per 2 coſ. $A\,\frac{m}{2n}\pi$ habebimus:

$$\text{ſin } A\,\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n-m}\cdot\frac{2n-2m}{n+m}\cdot\frac{2n+2m}{3n-m}\cdot\frac{4n-2m}{3n+m}\cdot\frac{4n+2m}{5n-m}\cdot$$

&c.

Coroll. 4.

46. Duplices iſtæ ſinuum & coſinuum expreſſiones inter ſe æquatæ dabunt.

$$1 = \frac{nn}{nn-mm}\cdot\frac{4nn-4mm}{4nn-mm}\cdot\frac{9nn}{9nn-mm}\cdot\frac{16nn-4mm}{16nn-mm}\cdot\frac{25nn}{25nn-mm}\text{ \&c.}$$

Coroll. 5.

47. Si n capiatur infinitum, ſeu m infinite parvum erit,

Q ſin

ſin A. $\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{2n}\pi$, hocque caſu ex utraque ſerie naſcitur idem valor ipſius π a Wallifio datus.

$$\pi = 2.\ \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ \ 9.\ 11.}\ \&c.$$

Lemma 4.

48. Valor hujus producti ex infinitis factoribus conſtantis

$$\frac{a\ (c+b)\ (a+k)\ (c+b+k)\ (a+2k)\ (c+b+2k)\ \&c.}{b\ (c+a)\ (b+k)\ (c+a+k)\ (b+2k)\ (c+a+2k)\ \&c.}$$

eſt $= \frac{\int z^{c-1}\,dz\,(1-z^k)^{\frac{b-k}{k}}}{\int z^{c-1}\,dz.(1-z^k)^{\frac{a-k}{k}}}$, ſi poſt utramque integrationem ponatur $z = 1$.

Problema 8.

49. Sinum anguli $\frac{m}{2n}\pi$ per formulas integrales exprimere.

Solutio.

Cum ſit ſin A. $\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n} \cdot \frac{2n-m}{n} \cdot \frac{2n+m}{3n} \cdot \frac{4n-m}{3n}$ &c. per §. 43. comparetur hoc productum infinitum cum lemmate præcedente, eritque $a = m$; $b = n$; $k = 2n$; & $c + m = n$ vel $c + n = 2n - m$, utrumque dat $c = n - m$. Hinc igitur fiet

$$\text{ſin A}\ \frac{m}{2n}\pi = \frac{\int z^{n-m-1}\,dz\,(1-z^{2n})^{-\frac{1}{2}}}{\int z^{n-m-1}\,dz\,(1-z^{2n})^{\frac{-2n+m}{2n}}}$$

ſi poſt utramque integrationem ita inſtitutam ut integralia

eva-

evaneſcant poſito $z = 0$, ponatur $z = 1$.

Cum vero etiam ſit per §. 45. $2 \text{ ſin } A \frac{m}{2n}\pi =$
$\frac{2m}{n-m} \cdot \frac{2n-2m}{n+m} \cdot \frac{2n+2m}{3n-m} \cdot \frac{4n-2m}{3n+m} \cdot$ &c. erit comparatione cum lemmate inſtituta: $a = 2m$; $b = n-m$; $c = n - m$; & $k = 2n$, unde obtinebitur.

$$2 \text{ ſin } A.\frac{m}{2n}\pi = \frac{\int z^{n-m-1} dz\,(1-z^{2n})^{\frac{-n-m}{2n}}}{\int z^{n-m-1} dz\,(1-z^{2n})^{\frac{m-n}{n}}}$$

ſi poſt integrationes ponatur $z = 1$. Q. E. J.

Coroll. 1.

50. Sequentes ergo nanciſcimur diverſarum formularum integralium comparationes.

$$\text{ſin } A.\frac{m}{2n}\pi.\int\frac{z^{n-m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}} = \int\frac{z^{n-m-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2n})}}$$

&

$$2\,\text{ſin } A.\frac{m}{2n}\pi.\int\frac{z^{n-m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n-m}{n}}} = \int\frac{z^{n-m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}$$

Coroll. 2.

51. Tum vero ſine ſinus ratione habita inſtitui poteſt iſta integralium comparatio.

$$2\int\frac{z^{n-m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n-m}{n}}} : \int\frac{z^{n-m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}} = \int\frac{z^{n-m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}} : \int\frac{z^{n-m-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2n})}}$$

Coroll. 3.

52. Ponamus eſſe $m=1$ & $n=1$; erit ſin $A\frac{m}{2n}\pi = 1$ atque comparationes ita ſe habebunt

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{(1-zz)}} = \int\frac{dz}{z\sqrt{(1-zz)}} \quad \& \quad 2\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dz}{z(1-zz)}$$

quarum æquationum poſteriori duo ſpatia hyperbolica infinita inter ſe comparantur.

Coroll. 4.

53. Ponamus eſſe $m=2$ & $n=3$ erit ſin $A\frac{m}{2n}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ unde orientur ſequenter comparationes.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dz}{(1-z^6)^{\frac{2}{3}}} = \int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^6)}} \text{ \&c. } \sqrt{3}.\int\frac{dz}{(1-z^6)^{\frac{1}{3}}} = \int\frac{dz}{(1-z^6)^{\frac{5}{6}}}$$

ex his naſcitur iſta proportio:

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{(1-z^6)^{\frac{2}{3}}} : \int\frac{dz}{(1-z^6)^{\frac{1}{3}}} = \int\frac{dz}{(1-z^6)^{\frac{1}{2}}} : \int\frac{dz}{(1-z^6)^{\frac{5}{6}}}$$

Coroll. 5.

54. Sit $m=1$; $n=2$, ut ſit ſin $A\frac{m}{2n}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erit

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} = \int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}}; \quad \& \sqrt{2}.\int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}} = \int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$$

quæ duæ æquationes inter ſe congruunt.

Coroll. 6.

55. Sit $m=1$, $n=3$, ut ſit ſin $A.\frac{m}{2n}\pi = \frac{1}{2}$ erit:

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{zdz}{(1-z^6)^{\frac{5}{6}}} = \int\frac{zdz}{(1-z^6)^{\frac{1}{2}}} \quad \& \quad \int\frac{zdz}{(1-z^6)^{\frac{2}{3}}} = \int\frac{zdz}{(1-z^6)^{\frac{2}{3}}}$$

quarum

quarum poſterior eſt identica, prior autem dat

$\int \frac{z\,dz}{(1-z^6)^{\frac{5}{6}}} = 2 \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^6)}}$, poſito poſt integrationem $z = 1$, quæ conditio ſemper adjuncta eſt intelligenda.

Problema. 9.

56. Expreſſiones infinitas, quas pro coſinu anguli $\frac{m}{2n}\pi$ invenimus, ad formulas integrales reducere.

Solutio.

Primum §. 44. invenimus eſſe coſ. A. $\frac{m}{2n}\pi =$

$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{n+m}{n} \cdot \frac{3n-m}{3n} \cdot \frac{3n+m}{3n} \cdot$ &c. quæ expreſſio cum lemmate (48) comparata dat $a = n - m$; $b = n$; $c = m$ & $k = 2n$, quibus ſubſtitutis oritur

$$\text{coſ.A.}\, \frac{m}{2n}\pi = \frac{\int z^{m-1}\,dz\,(1-z^{2n})^{-\frac{1}{2}}}{\int z^{m-1}\,dz\,(1-z^{2n})^{\frac{-n-m}{2n}}}$$

Deinde §. 45. vidimus eſſe coſ A $\frac{m}{2n}\pi =$

$\frac{2n-2m}{2n-m} \cdot \frac{2n+2m}{2n+m} \cdot \frac{4n-2m}{4n-m} \cdot \frac{4n+2m}{4n+m} \cdot$ &c.

qua expreſſione cum lemmate comparata reperietur $a = 2n - 2m$, $b = 2n - m$; $c = 3m$; & $k = 2n$; unde erit:

$$\text{coſ}\, A\, \frac{m}{2n}\pi = \frac{\int z^{3m-1}\,dz\,(1-z^{2n})^{-\frac{m}{2n}}}{\int z^{3m-1}\,dz\,(1-z^{2n})^{-\frac{m}{n}}}$$

 ſi poſt

ſi poſt integrationem ponatur $z = 1$. Q. E. J.

Coroll. 1.

57. Hinc iterum ſinus anguli $\frac{m}{2n}\pi$ exprimi poteſt ponendo $n-m$ loco m, prior quidem expreſſio dat eam ipſam quam jam invenimus, at ex poſteriori naſcitur.

$$\text{ſin } A\, \frac{m}{2n}\pi = \frac{\int z^{3n-3m-1}\, dz\, (1-z^{2n})^{-\frac{n+m}{2n}}}{\int z^{3n-3m-1}\, dz\, (1-z^{2n})^{-\frac{n+m}{n}}}$$

Coroll. 2.

58. Quemadmodum tres expreſſiones pro ſinu habemus, ita ad duas expreſſiones pro coſinu inventas tertia accedet ex ſecunda expreſſione ſinus, quæ dabit

$$2 \text{ coſ} A\, \frac{m}{2n}\pi = \frac{\int z^{m-1}\, dz\, (1-z^{2n})^{-\frac{2n+m}{2n}}}{\int z^{m-1}\, dz\, (1-z^{2n})^{-\frac{m}{n}}}$$

Coroll. 3.

59. Hinc igitur innumerabilia paria formularum integralium caſu quo $z = 1$ inter ſe comparari poterunt, hæque comparationes pendebunt a multiſectione anguli.

Problema. 10.

60. Invenire expreſſiones integrales, quæ caſu $z = 1$ tangentem anguli $\frac{m}{2n}\pi$ exhibeant.

Solutio.

Cum tangens anguli ſit quotus ex diviſione ſinus per coſinum ortus erit ex §. § 43. & 44:

tang.

$$\text{tang.} A.\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n-m}\cdot\frac{2n-m}{n+m}\cdot\frac{2n+m}{3n-m}\cdot\frac{4n-m}{3n+m}\cdot$$

&c. comparetur hæc expreſſio cum lemmate (48), eritque $a = m$; $b = n - m$; $c = n$, & $k = 2n$, unde orietur

$$\text{tang} A.\frac{m}{2n}\pi = \frac{\int z^{n-1}dz\left(1-z^{2n}\right)^{\frac{-n-m}{2n}}}{\int z^{n-1}dz\left(1-z^{2n}\right)^{\frac{m-m}{2n}}}$$

poſito poſt utramque integrationem $z = 1$.

Deinde ex §. 45 elicitur pro tangente iſta expreſſio

$$\text{tang.} A\ \frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n-m}\cdot\frac{2n-m}{n+m}\cdot\frac{2n+m}{3n-m}\cdot\frac{4n-m}{3n+m}\cdot \&c.$$

ex qua eadem expreſſio integralis, quæ ante invenitur. Q. E. J.

Coroll. 1.

61. Ponamus $m = 2$ & $n = 3$ erit tang A $\frac{m}{2n}\pi = \sqrt{3}$, hincque

$$\sqrt{3}.\ \int\frac{zz\,dz}{(1-z^6)^{\frac{2}{3}}} = \int\frac{zz\,dz}{(1-z^6)^{\frac{5}{6}}}.$$

ſi ponamus $z^3 = v$ erit $zz\,dz = \frac{1}{3}dv$, ac proinde

$$\int\frac{dv\sqrt{3}}{(1-v^2)^{\frac{2}{3}}} = \int\frac{dv}{(1-v^2)^{\frac{5}{6}}}$$

Coroll. 2.

62. Si generaliter ponamus $z^n = v$ habebitur

$$\text{tang}\ A\frac{m}{2n}\pi = \frac{\int dv\ (1-vv)^{\frac{-n-m}{2n}}}{\int dv\ (1-vv)^{\frac{m-2n}{2n}}}\quad \text{ſive}$$

$$\text{tang}\ A.\ \frac{m}{2n}\pi.\ \int\frac{dv}{(1-vv)^{\frac{2n-m}{2n}}} = \int\frac{dv}{(1-vv)^{\frac{n+m}{2n}}}$$

Coroll. 3.

Coroll. 3.

63. Sit $m = 1$, $n = 2$ erit tang $\frac{m}{2n}\pi = 1$ hincque

$$\int \frac{dv}{(1-vv)^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{dv}{(1-vv)^{\frac{3}{4}}}$$

quæ æquatio identica inſervit veritati calculi comprobandæ.

Scholion.

64. Plures hujus generis comparationes inſtitui poterunt, ſi in ſubſidium vocentur theoremata circa comparationes formularum integralium alibi a me demonſtrata (Tom. Comment. X.) unde quædam inſtar lemmatum depromam.

Lemma 5.

65. Si poſt integrationes ubique ponatur $z = 1$ erit.

$$\int \frac{z^{a-1}\,dz}{(1-z^b)^{1-c}} \cdot \int \frac{z^{a+bc-1}\,dz}{(1-z^b)^{1-\gamma}} = \int \frac{z^{a-1}\,dz}{(1-z^b)^{1-\gamma}} \cdot \int \frac{z^{a+b\gamma-1}\,dz}{(1-z^b)^{1-c}}$$

Lemma 6.

66. Si poſt integrationes ponatur $z = 1$ erit

$$\frac{b+i}{c+i} = \frac{\int z^{b(\frac{1}{2}-k)-1}\,dz\,(1-z^b)^c \cdot \int z^{b(\frac{3}{2}+c-k)-1}\,dz\,(1-z^b)^{-\frac{1}{2}+k}}{\int z^{b(\frac{1}{2}-k)-1}\,dz\,(1-z^b)^b \cdot \int z^{b(\frac{3}{2}+b+k)-1}\,dz\,(1-z^b)^{-\frac{1}{2}-k}}$$

Lemma 7.

67. Si poſt integrationes ponatur $z = 1$ erit

$$\frac{c}{a} = \frac{\int z^{a-1}\,dz\,(1-z^b)^{-\frac{1}{2}+k} \cdot \int z^{a+(\frac{1}{2}+k)b-1}\,dz\,(1-z^b)^{-\frac{3}{2}-k}}{\int z^{c-1}\,dz\,(1-z^b)^{-\frac{1}{2}-k} \cdot \int z^{c+(\frac{1}{2}-k)b-1}\,dz\,(1-z^b)^{-\frac{1}{2}+k}}$$

Lemma 8.

Lemma 8.

68. Si poſt integrationes ponatur $z = 1$ erit

$$\frac{(a+1)(a-k+1)}{(c+1)(c+k+1)} = \frac{\int z^{b(1+k)-1} dz\,(1-z^{b})^{c} \,.\, \int z^{b(1-k)-1} dz\,(1-z^{b})^{c+k}}{\int z^{b(1-k)-1} dz\,(1-z^{b})^{a} \,.\, \int z^{b(1+k)-1} dz\,(1-z^{b})^{a-k}}$$

THEOREMA. 3.

69. Si poſt integrationes ponatur $z = 1$ erit

$$\operatorname{coſ} A\,\frac{m}{2n}\pi = \frac{\int \frac{z^{m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{1}{2}}} \cdot \int \frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{1-c}}}{\int \frac{z^{m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{1-c}} \cdot \int \frac{z^{m+2nc-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}}$$

Demonſtratio.

Si enim in lemmate 5. ponamus $a = m$; $b = 2n$; & $\gamma = \frac{n-m}{2n}$ fit $\int \frac{z^{a-1}\,dz}{(1-z^{b})^{1-\gamma}} = \int \frac{z^{m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}$

At per §. 56. eſt $\int \frac{z^{m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}} = \frac{1}{\operatorname{coſ} A\,\frac{m}{2n}\pi} \int \frac{z^{m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{1}{2}}}$

qui valor in lemmate ſubſtitutus dabit æqualitatem, quam demonſtrari oportebat.

Coroll. 1.

70. Ineſt in hac æqualitate exponens indefinitus c, quem pro arbitrio determinare licet; ſit igitur $c = \frac{1}{2}$; & quia numerator & denominator factorem habent communem, erit:

$$\operatorname{cof} A\,\frac{m}{2n}\,\pi.\ \int\frac{z^{n+m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}=\int\frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{(1-z^{2n})}}$$

Coroll. 2.

71. Si in formula $\int\frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{(1-z^{2n})}}$ ponamus $z^n = v$ abit ea in $\frac{1}{n}\int\frac{dv}{\sqrt{(1-vv)}}$ cujus integrale poſito $z = 1$ ſeu $v = 1$ erit $\frac{\pi}{2n}$. Hanc obrem erit

$$\int\frac{z^{n+m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}} = \frac{\pi}{2n\operatorname{cof} A\frac{m}{2n}\pi}$$ poſito $z = 1$.

Coroll. 3.

72. Si ponamus $z = \frac{u}{(1+u^{2n})^{\frac{1}{2n}}}$, ut loco variabilis z introducamus u; eritque $z = o$ ſi $u = o$, at fit $z = 1$ ſi $u = \infty$. Quamobrem facta ſubſtitutione erit

$$\int\frac{u^{n+m-1}\,du}{1+u^{2n}} = \frac{\pi}{2n\operatorname{cof} A\frac{m}{2n}\pi}$$

poſito poſt integrationem $u = \infty$.

Coroll. 4.

73. Si in §. 29. loco n ponamus $2n$ erit $\frac{\pi}{2n\operatorname{ſin} A\frac{m}{2n}\pi}$

$= \int$

$= \int \frac{z^{m-1} + z^{2n-m-1}}{1+z^{2n}} dz$ ſi poſt integrationem fiat $z = 1$.

Quod ſi ergo pro m ſcribatur $n-m$ fiet

$$\frac{\pi}{2n \operatorname{coſ} A \frac{m}{2n}\pi} = \int \frac{z^{n-m-1} + z^{n+m-1}}{1+z^{2n}} dz,$$ poſito poſt integrationem $z = 1$, quod ergo integrale æquatur huic

$$\int \frac{u^{n+m-1} du}{1+u^{2n}}$$ ſi ponatur $u = \infty$.

THEOREMA. 4.

74. Si poſt integrationes ponatur $z = 1$, erit

$$2 \operatorname{coſ} A. \frac{m}{2n}\pi. \int \frac{z^{2m-1} dz}{(1-z^{2n})^{\frac{m}{n}}} = \int \frac{z^{2n-m-1} dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}$$

Demonſtratio.

In §. 58. nacti ſumus hanc coſinus expreſſionem

$$2 \operatorname{coſ} A \frac{m}{2n}\pi = \frac{\int z^{m-1} dz \, (1-z^{2n})^{-\frac{-2n+m}{2n}}}{\int z^{m-1} dz \, (1-z^{2n})^{-\frac{m}{n}}}$$

Si jam in lemmate 5, faciamus $a = m$, $b = 2n$, $c = \frac{m}{2n}$ & $\gamma = \frac{n-m}{n}$, duæ lemmatis formulæ integrales in has, quæ $2 \operatorname{coſ} A \frac{m}{2n}\pi$ exprimunt, transmutantur, quarum loco ſi ſcribatur $2 \operatorname{coſ} A. \frac{m}{2n}\pi$, prodibit 2 coſ

$$2\,\text{coſ}A.\frac{m}{2n}\pi.\int\frac{z^{2m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{m}{n}}}=\int\frac{z^{2n-m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}$$

Q. E. D.

Coroll. 1.

75. Si hinc in lemmate ſexto ponatur $b=2n$; $c=\frac{-m}{n}$ & $k=\frac{n-2m}{2n}$ formula $\int z^{b(\frac{1}{2}-k)-1}dz\,(1-z^{b})^{c}$ abit in hanc $\int\frac{z^{2m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{m}{n}}}$ cujus loco ſi ſcribamus $\frac{1}{2\,\text{coſ}A\frac{m}{2n}\pi}\int\frac{z^{2n-m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}$ faciamusque $b=0$, obtinebimus hanc reductionem

$$2\,\text{coſ}A\frac{m}{2n}\pi=\frac{\int\frac{z^{2n-m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}}{\int\frac{z^{2n-2m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n-m}{n}}}}\ \text{ſeu}\ \int\frac{z^{2m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{m}{n}}}=\int\frac{z^{2n-2m-1}dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n-m}{n}}}$$

Coroll. 2.

76. Si ponamus $m=2$ & $n=3$ erit coſ $A\frac{m}{2n}\pi=\frac{1}{2}$ unde æquatio theorematis dabit:

$\int\frac{z^{3}dz}{(1-z^{6})^{\frac{2}{3}}}=\int\frac{z^{3}dz}{(1-z^{6})^{\frac{2}{3}}}$, at æquatio coroll. præced. dabit

$\int$

$\int\frac{z\,dz}{(1-z^6)^{\frac{1}{3}}} = \int\frac{z^3\,dz}{(1-z^6)^{\frac{2}{3}}}$ ſeu poſito z loco zz hanc

$\int\frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = \int\frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$, poſito $z = 1$.

Coroll. 3.

77. Sit $m = 1$, & $n = 2$, fiet $\operatorname{cof} A\frac{m}{2n}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ideoque

$$\int\frac{z\,dz\sqrt{2}}{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}} = \int\frac{zz\,dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \text{ ob} \int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ex coroll. 1. vero erit: $\int\frac{z\,dz\sqrt{2}}{(1-z^4)^{\frac{1}{2}}} = \int\frac{zz\,dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$, quæ eſt eadem æqualitas.

THEOREMA. 5.

98. Si poſt integrationes ponatur $z = 1$ erit

$$\operatorname{tang.}\frac{m}{2n}\pi \cdot \int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}} \cdot \int\frac{z^{2n-m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{1-\gamma}} = \int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{1-\gamma}} \cdot \int\frac{z^{n+2n\gamma-1}\,d}{(1-z^{2n})^{\frac{n+}{2n}}}$$

Demonſtratio.

In §. 60. invenimus eſſe $\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}} = \operatorname{tang} A\frac{m}{2n}\pi$

$\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}$. Fiat jam in lemmate 5; $a = n$; $b = 2n$; & $c = \frac{n-m}{2n}$, atque facta ſubſtitutione erit

$$\text{tang.}\,A\frac{m}{2n}\pi\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}\cdot\int\frac{z^{2n-m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{1-\gamma}}=\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{1-\gamma}}\cdot\int\frac{z^{n+2n\gamma-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}$$

Q. E. D.

Coroll. 1.

79. Si ponatur $\gamma=1$, ob duo membra integrabilia fiet

$$\frac{n}{2n-m}\ \text{tang.}\,A\,\frac{m}{2n}\pi.\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}=\int\frac{z^{3n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}=$$

$$\frac{n}{2n-m}\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}$$ hancobrem erit:

$$\text{tang}\,A.\frac{m}{2n}\pi.\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}=\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}$$

quæ eſt ipſa in §. 60. inventa.

Coroll. 2.

80. Sit $\gamma=\frac{m}{2n}$ erit $\text{tang}\,A.\frac{m}{2n}\pi.\int\frac{z^{2n-m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}=\int\frac{z^{n+m-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}$

ac, ſi ponatur $\gamma=\frac{1}{2}$, ingredietur quadratura circuli, eritque

$$\int\frac{z^{2n-m-1}\,dz}{\sqrt{(1-z^{2n})}}\cdot\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}=\frac{\pi}{2n\,\text{tang}\,A\,\frac{m}{2n}\pi}\ \int\frac{z^{2n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}=$$

$$\frac{\pi}{2n(n-m)\text{tang}\,A\frac{m}{2n}\pi};\ \text{ſeu}\ \frac{\pi\,\text{tang}\,A\frac{m}{2n}\pi}{2mn}=\int\frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}}\cdot\int\frac{z^{n+m-1}\,dz}{\sqrt{(1-z^{2n})}}$$

Coroll.

Coroll. 3.

81. Cum igitur ſit $\frac{\pi}{2mn}$ tang A. $\frac{m}{2n}\pi = \int \frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}} \cdot \int \frac{z^{n+m-1}\,dz}{\sqrt{(1-z^{2n})}}$

atque ex §.60. ſit $\int \frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{n+m}{2n}}} =$ tang A $\frac{m}{2n}\pi. \int \frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}}$

erit $\frac{\pi}{2mn} = \int \frac{z^{n-1}\,dz}{(1-z^{2n})^{\frac{2n-m}{2n}}} \cdot \int \frac{z^{n+m-1}\,dz}{\sqrt{(1-z^{2n})}}$. Productum ergo harum duarum formularum integralium caſu quo $z=1$ per peripheriam circuli exhiberi poteſt.

Coroll. 4.

82. Si $m=1$ & $n=1$ erit ex coroll. præcedente
$\frac{\pi}{2} = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} \cdot \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1-\sqrt{(1-zz)}\right)$
quo caſu ſi fiat $z=1$, æqualitas ſponte perſpicitur.

Coroll. 5.

83. Sit $m=1$, & $n=2$, erit tang. A. $\frac{m}{2n}\pi = 1$, hinc ex coroll. 2 erit $\frac{\pi}{4} = \int \frac{z\,dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zz\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$. ex tertio autem oritur $\frac{\pi}{4} = \int \frac{z\,dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zz\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$. quæ duæ æquationes inter ſe congruunt.

Coroll. 6.

Coroll. 6.

84. Sit $m = 2$ & $n = 3$, erit tang. A $\frac{m}{2n}\pi = \sqrt{3}$: hinc ex coroll. 2. oritur $\frac{\pi}{4\sqrt{3}} = \int \frac{zz\,dz}{(1-z^6)^{\frac{5}{3}}} \cdot \int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(1-z^6)}}$: ex tertio vero naſcitur hæc æquatio $\frac{\pi}{12} = \int \frac{zz\,dz}{(1-z^6)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(1-z^6)}}$.

Scholion.

85. Hujusmodi theorematum ex formulis integralibus pro ſinu, coſinu & tangente inventis ope lemmatum 5, 6, 7 & 8 tanta multitudo deduci poteſt, ut iis capiendis integrum volumen non ſufficeret. Aperto autem fonte quilibet, quantum libuerit, inde haurire poterit. Complures quidem occurrunt caſus, uti vidimus, quibus vel ad æquationes identicas vel ejusmodi, quæ facile eo reducuntur, pervenitur, hique caſus veritatem reliquorum theorematum eo magis confirmant, in quibus ratio æqualitatis non perſpicitur. Sic in æquatione §. 30. ſi ponatur $m = 0$ & $n = 1$, fiet tang A $\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{2n}\pi$, eo quod tangens arcus evaneſcentis ipſi arcui æquatur; hinc igitur fiet $\frac{\pi\pi}{4} = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, cujus veritas, cum ſit $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{\pi}{2}$ caſu quo $z = 1$ ſponte apparet. Ceterum hujusmodi formularum integralium, quæ neque integrari, neque ad ſe mutuo reduci poſſunt

ſunt, comparationes eo magis ſunt notatu dignæ, quo minus via ad eas comprobandas patere videatur. Sic primum hujus generis theorema, ad quod jam pridem fui deductus, ſimplicitate ſe commendabat, quo inveni eſſe productum harum duarum formularum integralium $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ & $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ quarum altera arcum, altera ordinatam in curva elaſtica exprimit, caſu quo $z = 1$, æquale areæ circuli cujus diameter ſit $= 1$.

Num. III.

Ejusdem

De Inventione Integralium ſi poſt integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur.

Lemma 1.

1. Invenire ſummam ſeriei recurrentis $A + B + C + D + \ldots\ldots + P$ in qua quilibet terminus ex duobus præcedentibus ita formatur ut ſit $C = mB + nA$, $D = mC + nB$; &c. *Tab II.*

Solutio.

Quo ſolutio latius pateat, multiplicemus ſingulos terminos per terminos progreſſionis geometricæ, ut habeamus hanc ſeriem:

S Ax

$$\overset{1}{A}x^{\alpha} + \overset{2}{B}x^{\alpha+\beta} + \overset{3}{C}x^{\alpha+2\beta} + \overset{4}{D}x^{\alpha+3\beta} + \ldots + \overset{p}{P}x^{\alpha+(p-1)\beta}$$

Ponamus hujus ſerici ſummam $= S$, ut ſit

$$S = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + \ldots\ldots + Px^{\alpha+(p-1)\beta}$$

Hinc lege progreſſionis in computum ducta erit

$$mSx^{\beta} = mAx^{\alpha+\beta} + mBx^{\alpha+2\beta} + \ldots\ldots + mOx^{\alpha+(p-1)\beta} + mPx^{\alpha+p\beta}$$

$$nSx^{2\beta} = nAx^{\alpha+2\beta} + \ldots\ldots + nNx^{\alpha+(p-1)\beta}$$

$$+ nOx^{\alpha+p\beta} + nPx^{\alpha+(p+1)\beta}$$

ſubtrahantur hæ duæ ſeries conjunctim a ſuperiori atque ob $C = mB + nA$, $D = mC + nB$; ..... $P = mO + nN$ habebitur: $S(1 - mx^{\beta} - nx^{2\beta}) = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} - mAx^{\alpha+\beta} - mPx^{\alpha+p\beta} - nOx^{\alpha+p\beta} - nPx^{\alpha+(p+1)\beta}$. Sit in ſerie propoſita $A+B+C+D+ \ldots + P$ terminus ultimum P ſequens $= Q$ erit $Q = mP + nO$, quo introducto fiet

$$S = \frac{Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} - mAx^{\alpha+\beta} - Qx^{\alpha+p\beta} - nPx^{\alpha+(p+1)\beta}}{1 - mx^{\beta} - nx^{2\beta}}$$

Vel ſi in ſerie $A+B+C+ \ldots + P$ vocetur terminus primum A antecedens $= \Delta$, propter $B = mA + n\Delta$ fiet ſumma quæſita

$$S = \frac{Ax^{\alpha} + n\Delta x^{\alpha+\beta} - Qx^{\alpha+p\beta} - nPx^{\alpha+(p+1)\beta}}{1 - mx^{\beta} - nx^{2\beta}}$$

Facto

Facto jam $x = 1$ erit ſeriei propoſitæ

$A + B + C + \ldots\ldots + P$ ſumma $=$

$\frac{A + n\Delta - Q - nP}{1 - m - n}$. Q. E. J.

Lemma 2.

2. Exiſtente $A + B + C + D + \ldots\ldots + P$ ſerie recurrente, in qua ſit $C = mB + nA$; $D = mC + nB$, &c. invenire ſummam hujus ſeriei:

$\alpha A + (\alpha + \beta) B + (\alpha + 2\beta) C + \ldots\ldots + (\alpha + (p-1)\beta) P.$

Solutio.

Conſideremus ſeriem latius patentem hanc.

$$S = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + \ldots\ldots Px^{\alpha+(p-1)\beta}$$

cujus ſummam ante invenimus eſſe:

$$S = \frac{Ax^{\alpha} + n\Delta x^{\alpha+\beta} - Qx^{\alpha+p\beta} - nPx^{\alpha+(p+1)\beta}}{1 - mx^{\alpha} - nx^{2\beta}}$$

denotante Δ terminum primum A antecedentem, ac Q terminum ultimum P ſequentem in ſerie

$A + B + C + D + \ldots\ldots + P.$

Quodſi jam poſito x variabili differentietur ſeries, cujus ſummam poſuimus $= S$ erit

$$\frac{dS}{dx} = \alpha Ax^{\alpha-1} + (\alpha+\beta) Bx^{\alpha+\beta-1} + \ldots\ldots + (\alpha + (p-1)\beta) Px^{\alpha+(p-1)\beta-1}$$

at ex valore ſummæ S ante invento erit

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\alpha A x^{\alpha-1} \begin{matrix} +m(\beta-\alpha)A \\ +n(\beta+\alpha)\Delta \end{matrix} x^{\alpha+\beta-1} \begin{matrix} +n(2\beta-\alpha)A \\ -mn\alpha\Delta \end{matrix} x^{\alpha+2\beta-1} \; nn(\beta-\alpha)\Delta x^{\alpha+3\beta-1} -(\alpha+p\beta)Q x^{\alpha+p\beta-1} \begin{matrix} +m(\alpha+(p-1)\beta)Q \\ -n(\alpha+(p+1)\beta)P \end{matrix} x^{\alpha+(p+1)\beta-1} \begin{matrix} +n(\alpha+(p-2)\beta)Q \\ +mn(\alpha+p\beta)P \end{matrix} x^{\alpha+(p+2)\beta-1} + nn(\alpha+(p-1)\beta)P x^{\alpha+(p+3)\beta-1}}{(1-mx^{\beta}-nx^{2\beta})^2}$$

Ponatur jam $x = 1$ eritque ſeriei propoſitæ

$\alpha A + (\alpha+\beta) B + (\alpha+2\beta) C + \ldots\ldots + (\alpha+(p-1)\beta) P$

$$\text{ſumma} = \frac{\begin{matrix} +(1-m-n)\alpha A+(m+2n)\beta A+n(1-m-n)\alpha\Delta+n(1+n)\beta\Delta \\ -(1-m-n)\alpha Q-p(1-m-n)\beta Q-(m+2n)\beta Q-n(1-m-n)\alpha P \\ -np(1-m-n)\beta P-n(1+n)\beta P \end{matrix}}{(1-m-n)^2}$$

Vel hæc ſumma eſt $\dfrac{\alpha A+n\alpha\Delta-(\alpha+p\beta)Q-n(\alpha+p\beta)P}{1-m-n}$

$$+\frac{(m+2n)\beta A+n(1+n)\beta\Delta-(m+2n)\beta Q-n(1+n)\beta P}{(1-m-n)^2}$$

Q. E. J.

Coroll. 1.

3. Summa ergo hujus ſeriei:

$A+2B+3C+4D+\ldots\ldots pP$

erit $= \dfrac{A+n\Delta-(1+p)Q-n(1+p)P}{1-m-n} + \dfrac{(m+2n)(A-Q)+n(1+n)(\Delta-P)}{(1-m-n)^2}$

exiſtente $A+B+C+D+\ldots\ldots+P$ ſerie recurrente cujus indices ſint $m+n$.

Coroll. 2.

Coroll. 2.

4. Simili modo hujus ſeriei:

$$A + 3B + 5C + 7D + \ldots\ldots (2p-1)P$$

ſumma erit $= \dfrac{A + n\Delta - (2p+1)Q - n(2p+1)P}{1-m-n}$

$$+ \frac{2(m+2n)(A-Q) + 2n(1+n)(\Delta - P)}{(1-m-n)^2}.$$

Problema. 1.

5. Invenire ſummam ſinuum quotcunque angulorum in progreſſione arithmetica progredientium.

Solutio.

Teneant anguli, quorum ſinuum ſumma quæritur, hanc progreſſionem:

$$\overset{1}{s};\ \overset{2}{s+u};\ \overset{3}{s+2u};\ \overset{4}{s+3u};\ \ldots\ldots\ldots\ \overset{p}{s+}(p-1)u$$ erit ergo ſeries ſinuum ſummanda hæc ſin As + ſin $A(s+u)$ + ſin $A(s+2u)$ + ... + ſin $A(s+(p-1)u)$ Eſt vero hæc progreſſio ſeries recurrens, cujus indices ſunt $2\,\mathrm{coſ}\,Au$, -1 ſumta unitate pro ſinu toto; unde erit $m =$ coſ Au & $n = -1$, facta ad lemma 1 applicatione. Porro erit $A =$ ſin As; $P =$ ſin $A(s+(p-1)u)$; $Q =$ ſin $A(s+pu)$ & $\Delta =$ ſin $A(s-u)$. Hinc erit ſumma ſeriei ſinuum propoſitæ $= \dfrac{\text{ſin}\,As - \text{ſin}\,A(s-u) - \text{ſin}\,A(s+pu) + \text{ſin}\,A(s+(p-1)u)}{2 - 2\,\text{coſ}\,Au}$

$=$ ſin As + ſin $A(s+u)$ + ſin $A(s+2u)$ + ... + ſin $A(s+(p-1)u)$

Q. E. J.

Coroll. 1.

6. Quoniam eſt ſin $A(s-u) =$ ſin As. coſ Au − coſ As. ſin Au

erit $\frac{\text{ſin}\,As - \text{ſin}\,A(s-u)}{2-2\,\text{coſ}\,Au} = \frac{\text{ſin}\,As}{2} + \frac{\text{coſ}\,As\,.\,\text{ſin}\,Au}{2\,(1-\text{coſ}\,Au)} =$ $\frac{\text{ſin}\,As}{2} + \frac{\text{coſ}\,As}{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}u}$, ob $\frac{\text{ſin}\,Au}{1-\text{coſ}\,Au} = \frac{1}{\text{tang}\,A\frac{1}{2}u}$; ſimili modo eſt $\text{ſin}\,A\,(s+(p-1)u) = \text{ſin}\,A\,(s+pu)\,\text{coſ}\,Au - \text{coſ}\,A\,(s+pu)\,\text{ſin}\,Au$ hincque $-\frac{\text{ſin}\,A(s+pu) + \text{ſin}\,A\,(s+(p-1)u)}{2\,(1-\text{coſ}\,Au)} =$ $\frac{-\text{ſin}\,A(s+pu)}{2} - \frac{\text{coſ}\,A\,(s+pu)}{2\,\text{tang}\,A\frac{1}{2}u}$; unde erit ſeriei propoſitæ ſumma $= \frac{\text{ſin}\,As - \text{ſin}\,A\,(s+pu)}{2} + \frac{\text{coſ}\,As - \text{coſ}\,A(s+pu)}{2\,\text{tang}\,A\frac{1}{2}u}$.

Coroll. 2.

7. Quia porro eſt $\text{tang}\,A\frac{1}{2}u = \frac{\text{ſin}\,A\frac{1}{2}u}{\text{coſ}\,A\frac{1}{2}u}$; erit ſeriei propoſitæ ſumma $= \frac{\text{coſ}\,A\,(s-\frac{1}{2}u) - \text{coſ}\,A\,(s+pu-\frac{1}{2}u)}{2\,\text{ſin}\,A\frac{1}{2}u}$

In ſerie igitur arcuum a primo s ſubtrahatur dimidia differentia ($\frac{1}{2}u$) eademque ad ultimum arcum addatur, arcuumque reſultantium coſinus hujus ſubtrahatur a coſinu illius, ac differentia per duplum ſinum dimidiæ differentiæ diviſa, dabit ſummam omnium ſinuum arcuum illorum arithmeticam progreſſionem conſtituentium.

Coroll. 3.

8. Si ſemicirculus cujus radius $= 1$, dividatur in partes quotcunque æquales numero n; erit poſita ſemicircumferentia $= \pi$, differentia $= \frac{\pi}{n}$. Quod ſi jam ex ſingulis diviſi-

onis

onis punctis ſinus ad diametrum ducantur, erit ob $s = \frac{\pi}{n}$; $u = \frac{\pi}{n}$; & $s + (p-1)\,u = \pi$, ſumma omnium horum ſinuum $= \dfrac{\text{coſ}\,A.\,\frac{\pi}{2n} - \text{coſ}\,A\left(\pi + \frac{\pi}{2n}\right)}{2\,\text{ſin}\,A\,\frac{\pi}{2n}} = \text{cot}\,A.\frac{\pi}{2n}$

Coroll. 4.

9. Quod ſi igitur ſemicirculus A D G in partes quotcunque æquales AB, BC, CD, &c. dividatur, atque ex ſingulis diviſionum punctis B, C, D, E &c. ad diametrum AG demittantur normales Bb, Cc, Dd, Ee, & Ff, ſumma harum rectarum junctim ſumtarum æquabitur cotangenti ſemiſſis unius partis, ſeu biſecta prima parte AB in M, ductaque hujus ſemiſſis AM tangente AT erit AT ad radium uti radius ad ſummam omnium ſinuum Bb + Cc + Dd + Ee + Ff, quod eſt Theorema Vietæ. *Fig. I.*

Coroll. 5.

10. Simili modo ſi arcus circuli quicunque BG ſecetur in partes quotcunque æquales BC, CD, DE, &c. atque ex ſingulis iſtis punctis ad diametrum quampiam pro lubitu ductam AOS demittantur perpendicula, Bb, Cc, Dd . . . . . Gg, hæc perpendicula erunt ſinus arcuum AB, AC, AD, ... AG in arithmetica progreſſione progredientium, exiſtente $A\text{B} = s$, $\text{BC} = u$, & $A\text{G} = s + (p-1)\,u$. Quare ſi utrinque ad arcum diviſum BG addantur partes BM = GN $= \frac{1}{2}$ BC, hincque demittantur perpendicula Mm & Nn erit Om $= \text{coſ}\,A\,(s - \frac{1}{2}u)$ & On $= -\,\text{coſ}\,A\,(s + (p - \frac{1}{2})\,u)$. *Fig. II.*

Chorda

Chorda autem BC erit $= 2 \cdot$ ſin $A \frac{1}{2} u$. Ex his ergo reperitur omnium ſinuum $Bb + Cc + Dd + Ee + Ff + Gg$ ſumma $= \frac{Om + On}{2, BC} = \frac{mn}{2BC}$, poſito radio $OA = 1$. Hinc ſi ſuper baſi mn conſtruatur triangulum iſosceles ſimile triangulo BOC, cordam BC pro baſi & centrum O pro vertice habenti, tum unum crus iſtius trianguli æquale erit ſummæ ſinuum $Bb + Cc + Dd + Ee + Ff + Gg$.

Problema 2.

Fig. 3. 11. Diviſo ſemicirculo in partes quotcunque æquales AB, BC, CD, &c. demiſſisque ſinibus Bb, Cc, Dd, Ee, &c. compleantur parallelogramma rectangula $b\alpha$, $c\beta$, $d\gamma$, $e\delta$, $f\epsilon$, $g\zeta$, $h\eta$, $i\theta$, $k\iota$; quorum omnium junctim ſumtorum determinari ſummam oporteat.

Solutio.

Poſito radio $AO = 1$, & ſemicircumferentia $= \pi$ ſit ea diviſa in partes æquales, numero n, erit unaquæque partium $AB = BC = CD =$ &c. $= \frac{\pi}{n}$; hincque $Bb =$ ſin $A \frac{\pi}{n}$; $Cc =$ ſin $A \frac{2\pi}{n}$; $Dd =$ ſin $A \frac{3\pi}{n}$; &c. usque ad ultimum diviſionis punctum k, pro quo ſinus erit $=$ ſin $A \frac{n\pi}{n} = o$. Jam parallelogammorum baſes erunt ut ſequitur $Ab = 1 -$ coſ $A \frac{\pi}{n}$, $bc =$ coſ $A \frac{\pi}{n} -$ coſ $A \frac{2\pi}{n}$; $cd =$

coſ

$\operatorname{cof} A\frac{2\pi}{n} - \operatorname{cof} A\frac{3\pi}{n}$, de $= \operatorname{cof} A\frac{3\pi}{n} - \operatorname{cof} A\frac{4\pi}{n}$; & ultima baſis i K $= \operatorname{cof} A\frac{(n-1)\pi}{n} - \operatorname{cof} A\frac{n\pi}{n}$, cui reſpondet altitudo $= 0$. Cum porro ſit generaliter $\operatorname{ſin} A\,\phi . \operatorname{cof} A\,\psi = \frac{\operatorname{ſin} A(\phi+\psi) + \operatorname{ſin} A(\phi-\psi)}{2}$, areæ parallelogrammmorum noſtrorum ita ſe habebunt.

$$b\alpha = \operatorname{ſin} A\frac{\pi}{n}\left(1 - \operatorname{cof} A\frac{\pi}{n}\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{\pi}{n} + \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{\pi}{n} - \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{2\pi}{n}$$

$$c\beta = \operatorname{ſin} A\frac{2\pi}{n}\left(\operatorname{cof} A\frac{\pi}{n} - \operatorname{cof} A\frac{2\pi}{n}\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{\pi}{n} + \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{3\pi}{n} - \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{4\pi}{n}$$

$$d\gamma = \operatorname{ſin} A\frac{3\pi}{n}\left(\operatorname{cof} A\frac{2\pi}{n} - \operatorname{cof} A\frac{3\pi}{n}\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{\pi}{n} + \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{5\pi}{n} - \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{6\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$K2 = \operatorname{ſin} A\frac{n\pi}{n}\left(\operatorname{cof} A\frac{(n-1)\pi}{n} - \operatorname{cof} A\frac{n\pi}{n}\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{\pi}{n} + \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{(2n-1)\pi}{n} - \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{2n\pi}{n}$$

Tres igitur ſeries habemus, quarum ſummas inveſtigare debemus, ac primæ quidem cujus omnes termini ſunt $= \tfrac{1}{2}\operatorname{ſin} A\frac{\pi}{n}$ ſumma erit $= \frac{n}{2}\operatorname{ſin} A\frac{\pi}{n}$. Secunda ſeries duplicata eſt

ſin

$$\text{ſin A}\frac{\pi}{n} + \text{ſin A}\frac{3\pi}{n} + \text{ſin A}\frac{5\pi}{n} + \ldots\ldots + \text{ſin A}\frac{(2n-1)\pi}{n}$$

quæ ad propoſitionem præcedentem accommodata dat $s =$ $\frac{\pi}{n}$; $u = \frac{2\pi}{n}$; $s + (p-1)\,u = \frac{\pi}{n} + \frac{2(p-1)\pi}{n} = \frac{(2n-1)\pi}{n}$.

Ejus ergo ſumma erit $= \dfrac{\text{coſA}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - \text{coſA}\frac{2n\pi}{n}}{2\,\text{ſin A}\frac{\pi}{n}} = 0.$

Tertia ſeries bis ſumta eſt:

$$\text{ſin A}\frac{2\pi}{n} + \text{ſin A}\frac{4\pi}{n} + \text{ſin A}\frac{6\pi}{n} + \ldots\ldots + \text{ſin A}\frac{2n\pi}{n}$$

quæ ergo dat $s = \frac{2\pi}{n}$; $u = \frac{2\pi}{n}$; ex quo ipſius ſumma

erit $= \dfrac{\text{coſA}\frac{\pi}{n} - \text{coſA}\frac{(2n+1)\pi}{n}}{2\,\text{ſin A}\frac{\pi}{n}} = \dfrac{\text{coſ A}\frac{\pi}{n} - \text{coſ A}\frac{\pi}{n}}{2\,\text{ſin A}\frac{\pi}{n}} = 0$

Cum igitur ſecundæ & tertiæ ſeriei ſummæ evaneſcant, erit ſumma omnium rectangulorum quæſita:

$$b\,\alpha + c\,\beta + d\,\gamma + e\,\delta + \ldots + \text{K}\,\iota = \frac{n}{2}\text{ſin A}\frac{\pi}{n}$$

Q. E. J.

Corollarium.

12. Si ergo diametro AK ducatur parallela $m\,o$, quæ tangentem $\text{A}a$ biſecet in m & excentro O erigatur perpendicularis Oo, erit $\text{Oo} = \text{Am} = \frac{1}{2}\,\text{Bb} = \frac{1}{2}\,\text{ſin A}\frac{\pi}{n}$; hincque area rectanguli OomA ob radium $\text{AO} = 1$ erit $=$ $\frac{1}{2}\,\text{ſin A}\frac{\pi}{n}$; hoc igitur rectangulum toties ſumtum, quot ſunt diviſionis puncta, ſeu quot numerus n continet unitates dabit

bit ſummam omnium rectangulorum $b\alpha + c\beta + d\gamma +$ &c.

Problema. 3.

13. Si arcus circuli quicunque BH dividatur in partes quotcunque æquales BC, CD, DE, &c. atque ex ſingulis diviſionis punctis ad diametrum pro lubitu ductam demittantur perpendicula Bb, Cc, Dd, &c. ac præterea ex his parallelogramma compleantur $c\beta$; $d\gamma$; $e\delta$; $f\epsilon$; $g\zeta$, $h\eta$, invenire aream omnium horum parallelogrammorum junctim ſumtorum.

Solutio.

Sit arcus diviſus BH $= q$; numerus diviſionum $= n$, ita ut quælibet pars BC $=$ CD $=$ DE &c. futura ſit $= \frac{q}{n}$. Sit præterea arcus AB $= a$, erit Bb $=$ ſin Aa; Cc $=$ ſin A $(a + \frac{q}{n})$; Dd $=$ ſin A $(a + \frac{2q}{n})$, &c. ultima vero Hh $=$ ſin A $(a + \frac{nq}{n}) =$ ſin A $(a+q)$. Ex his rectangula propoſita ita ſe habebunt: *Fig. IV.*

$$c\beta = \text{ſin A}\left(a+\frac{q}{n}\right)\left(\text{coſ A}a - \text{coſ A}\left(a+\frac{q}{n}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin A}\,\frac{q}{n} + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin A}\left(2a+\frac{q}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin A}\left(2a+\frac{2q}{n}\right)$$

$$d\gamma = \text{ſin A}\left(a+\frac{2q}{n}\right)\left(\text{coſ A}\left(a+\frac{q}{n}\right) - \text{coſ A}\left(a+\frac{2q}{n}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin A}\,\frac{q}{n} + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin A}\left(2a+\frac{3q}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin A}\left(2a+\frac{4q}{n}\right)$$

$$e\delta = \text{ſin A}\left(a+\frac{3q}{n}\right)\left(\text{coſ A}\left(a+\frac{2q}{n}\right) - \text{coſ A}\left(a+\frac{3q}{n}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin A}\,\frac{q}{n} + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin A}\left(2a+\frac{5q}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin A}\left(2a+\frac{6q}{n}\right)$$

$\vdots$

$$b\eta = \text{ſin}\,A\,(a+q)\left(\text{coſ}\,A\,a+\frac{(n-1)q}{n}\right)-\text{coſ}\,A\,(a+q)\Big) = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n} + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\,A\left(2a+\frac{(2n-1)q}{n}\right)-\tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\,A\,(2a+2q)$$

Iterum igitur tres ſeries ſummari oportet, quarum primæ ſummam patet eſſe $= \frac{n}{2}\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n}$. Secundæ ad hanc addendæ ſumma per propoſitionem 1, eſt $= \dfrac{\text{coſ}\,A\,2a-\text{coſ}\,A\,(2a+2q)}{4\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n}}$; tertiæ ſubtrahendæ ſumma eſt $= \dfrac{\text{coſ}\,A\left(2a+\frac{q}{n}\right)-\text{coſ}\,A\left(2a+2q+\frac{q}{n}\right)}{4\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n}}$. Omnium ergo rectangulorum propoſitorum ſumma erit $=$

$$\frac{\frac{n}{2}\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n}+\text{coſ}\,A\,2a-\text{coſ}\,A\left(2a+\frac{q}{n}\right)-\text{coſ}\,A\,(2a+2q)+\text{coſ}\,A\left(2a+2q+\frac{q}{n}\right)}{4\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n}}$$

$$= \frac{n}{2}\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n}+\frac{\text{ſin}\,A\,\frac{q}{2n}\left(\text{ſin}\,A\left(2a+\frac{q}{2n}\right)-\text{ſin}\,A\left(a+2q+\frac{q}{2n}\right)\right)}{2\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n}}$$

$$= \frac{n}{2}\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n}+\frac{\text{ſin}\,A\,q\left(\text{ſin}\,A\,(2a+q)-\text{ſin}\,A\left(2a+q+\frac{q}{n}\right)\right)}{2\,\text{ſin}\,A\,\frac{q}{n}}$$

quæ

quæ reductiones eo nituntur fundamento, quo differentia coſinuum duorum angulorum æqualis eſt duplo producto ex ſinu ſemiſummæ in ſinum ſemidifferentiæ eorundem angulorum. Q. E. J.

Coroll. 1.

14. Si diameter AS ab utroque arcus diviſi BH termino æqualiter diſtet, ut ſit $AB = SH = a$, erit $2a + q =$ ſemicircumferentiæ π; hincque ſin A $(2a+q) = 0$ & ſin A$(2a + q + \frac{q}{n}) = -$ ſin A $\frac{q}{n}$. Hoc ergo caſu ſumma omnium rectangulorum erit $= \frac{n}{2}$ ſin A $\frac{q}{n} + \frac{1}{2}$ ſin Aq.

Coroll. 2

15. Quoniam eſt ſin A $\frac{q}{n} = 2$ ſin A $\frac{q}{2n}$. coſ A $\frac{q}{2n}$ erit ex ſecunda expreſſione ſumma omnium rectangulorum $=$

$$\frac{n}{2} \text{ſin A} \frac{q}{n} + \frac{\text{ſin A}\left(2a + \frac{q}{2n}\right) - \text{ſin A}\left(2a + 2q + \frac{q}{2n}\right)}{4 \text{ coſ A} \frac{q}{2n}}$$

Coroll. 3.

16. Si ponatur alterum arcus diviſi complementum $SH = b$ erit $a + b + q = \pi$, & $a = \pi - b - q$, qui valor in poſtremo ſinu ſubſtitutus dabit ſummam rectangulorum quæſitam

$$= \frac{n}{2} \text{ſin A} \frac{q}{n} + \frac{\text{ſin A}\left(2a + \frac{q}{2n}\right) + \text{ſin A}\left(2b - \frac{q}{2n}\right)}{4 \text{ coſ A} \frac{q}{2n}}$$

Coroll. 4.

17. Hæc expreſſio ſummæ quæſitæ reduci poteſt ad hanc

for-

formam: $\frac{n}{2}\ \text{ſin}\ A\ \frac{q}{n} + \frac{1}{4}\ \text{ſin}\ A\ 2a + \frac{1}{4}\ \text{ſin}\ A\ 2b +$ $\frac{1}{4}\ \text{tang}\ A\frac{q}{2n}\ (\text{coſ}\ A\ 2a - \text{coſ}\ A\ 2b.)$ Hæcque ultimus transmutatur in hanc: $\frac{n}{2}\ \text{ſin}\ A\frac{q}{n} + \frac{1}{2}\text{ſin}\,A(a+b)\,\text{coſ}\,A(a-b) - \frac{1}{2}\text{ſin}\,A(a+b)\,\text{ſin}\,A(a-b)\,\text{tang}\,A\frac{q}{2n} = \frac{n}{2}\text{ſin}\,A\frac{q}{n} + \frac{\text{ſin}\ A\,(a+b)}{2\,\text{coſ}\,A\frac{q}{2n}}$

$$\text{coſ}\,A\left(a-b+\frac{q}{2n}\right) = \frac{n}{2}\ \text{ſin}\,A\ \frac{q}{n} + \frac{\text{ſin}\,A\,q.\ \text{coſ}\,A\left(a-b+\frac{q}{2n}\right)}{2\,\text{coſ}\,A\frac{q}{2n}}$$

Problema 4.

18. Invenire ſummam hujus ſeriei coſinuum:
$\text{coſ}\,A\,s + \text{coſ}\,A\,(s+u) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{coſ}\,A\,(s+(p-1)\,u)$ quorum anguli s; $s+u$; $s+2u$; …….. $s+(p-1)\,u$ progreſſionem arithmeticam conſtituunt.

Solutio.

Seriei hujus coſinuum pariter ac ſinuum ſumma ope lemmatis primi inveniri poteſt, cum coſinus angulorum in arithmetica progreſſione progredientium conſtituant ſeriem recurrentem, cujus indices ſunt $2\,\text{coſ}\,A\,u, -1$. erit ergo $A = \text{coſ}\,A\,s$; $\Delta = \text{coſ}\,A\,(s-u)$; $P = \text{coſ}\,A\,(s+(p-1)\,u)$; $Q = \text{coſ}\,A\,(s+p\,u)$; & $m = 2\,\text{coſ}\,A\,u$; $n = -1$. ex quibus ſeriei propoſitæ ſumma erit $= \frac{\text{coſ}\,A\,s - \text{coſ}\,A(s-u) - \text{coſ}\,A\,(s+pu) + \text{coſ}\,A(s+(p-1)\,u).}{2-2\,\text{coſ}\,A\,u.}$

Cum autem ſit $\text{coſ}\ A\ (s-u) = \text{coſ}\,A\,s\,\text{coſ}\,A\,u + \text{ſin}\,A\,s.\,\text{ſin}\,A\,u$ atque $\text{coſ}\,A\,(s+p\,u-u) = \text{coſ}\,A\,(s+p\,u)\,\text{coſ}\,A\,u + \text{ſin}\,A\,(s+p\,u)$ $\text{ſin}\,A\,u$, erit ſumma $= \frac{1}{2}\ \text{coſ}\,A\,s - \frac{\text{ſin}\ A\ s}{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,u} - \frac{1}{2}\ \text{coſ}\ A$ $(s+p\,u)$

$$(s+pu)+\frac{\text{ſin}\,A(s+pu)}{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}u}=\frac{-\text{ſin}\,A(s-\frac{1}{2}u)+\text{ſin}\,A(s+(p-\frac{1}{2})u).}{2\,\text{ſin}\,A\,\frac{1}{2}u}$$

Q. E. J.

Scholion.

19. Eadem coſinuum ſumma ex inventa ſinuum ſumma per differentiationem facile inveniri poteſt. Cum enim ſit; ſin $A s+$ ſin $A(s+u)+$ ſin $A(s+2u)+\ldots\ldots\ldots+$ ſin A $(s+(p-1)u)=\frac{\text{coſ}\,A(s-\frac{1}{2}u)-\text{coſ}\,A\,(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\,\text{ſin}\,A\,\frac{1}{2}u}$

differentietur hæc æquatio poſito s variabili & u conſtante, ac facta diviſione utrinque per ds fiet:

coſ $A\,s+$ coſ $A\,(s+u)+$ coſ $A\,(s+2u)+\ldots+$ coſ A $(s+(p-1)u)=\frac{-\text{ſin}\,(s-\frac{1}{2}u)+\text{ſin}\,A(s+(p-\frac{1}{2})u).}{2\,\text{ſin}\,A\,\frac{1}{2}u}$

Corollarium 1.

20. Propoſita ergo ſerie coſinuum, quorum anguli in progreſſione arithmetica progrediuntur, a primo angulo ſubtrahatur ſemidifferentia progreſſionis, hæcque eadem ſemidifferentia ad angulum ultimum addatur. Tum ſinus illius anguli ſubtrahatur a ſinu hujus & differentia per duplum ſinum ſemidifferentiæ diviſa dabit ſummam omnium coſinuum.

Coroll. 2.

21. Si angulus primus s evaneſcat, & ultimus $s+(p-1)u$ fiat rectus, erit $-$ſin $A(s-\frac{1}{2})=$ ſin $A\frac{1}{2}u$ & ſin $A(s+(p-\frac{1}{2})u)$ $=$ coſ $A\,\frac{1}{2}u$, ex quo hujus ſeriei coſinuum ſumma erit $=\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ cot $A\,\frac{1}{2}\,u$.

Problema. 5.

22. Invenire ſummam hujus ſeriei ſinuum:

$\alpha \sin A s + (\alpha + \beta) \sin A (s + u) + (\alpha + 2\beta) \sin A (s + 2u) +$
$(\alpha + 3\beta) \sin A (s + 3u) + \ldots\ldots + (\alpha + (p-1)\beta) \sin A (s + (p-1)u)$
quorum coefficientes progreſſionem arithmeticam conſtituunt; anguli autem ipſi pariter in arithmetica progreſſione progrediuntur.

Solutio.

Quoniam ſinus angulorum arithmeticam progreſſionem conſtituentium ſeriem recurrentem præbent, caſus hic ad lemma ſecundum pertinet, eritque $m = 2 \operatorname{coſ} A u$ & $n = -1$. Porro erit $A = \operatorname{ſin} A s$, $\Delta = \sin A (s - u)$; $P = \sin A (s + (p-1) u)$ & $= Q \sin A (s + p u)$. Ex his reperietur ſeriei propoſitæ ſumma

$$= \frac{\alpha(\sin A s - \sin A (s-u))}{2 - 2 \operatorname{coſ} A u} - \frac{\alpha + p\beta) \ (\sin A (s+pu) - \sin A (s + (p-1) u))}{2 - \operatorname{coſ} A u}$$

$$+ \frac{2 \beta \ (\operatorname{coſ} A u - 1) \ (\sin A s - \sin A (s + p u))}{4 (1 - \operatorname{coſ} A u)^2}$$

$$= \frac{\alpha}{2} \sin A s + \frac{\alpha \operatorname{coſ} A s}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} u} - \frac{(\alpha + p\beta)}{2} \sin A (s + p u) -$$

$$\frac{(\alpha + p\beta) \operatorname{coſ} A (s + p u)}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} u} - \frac{\beta \sin A s + \beta \sin A (s + p u).}{2(1 - \operatorname{coſ} A u)}$$

Quæ ſumma reducitur ad hanc formam $=$

$$\frac{\alpha \operatorname{coſ} A (s - \frac{1}{2} u) - (\alpha + p \beta) \operatorname{coſ} A (s + (p - \frac{1}{2}) u)}{2 \sin A \frac{1}{2} u}$$

$$- \frac{\beta \sin A s + \beta \sin A (s + p u).}{2(1 - \operatorname{coſ} A u)} \qquad \text{Q. E. J.}$$

Co-

Coroll. 1.

23. Quoniam eſt $1 - \cos A u = 2(\sin A \tfrac{1}{2}u)^2$ erit quoque ſeriei ſinuum propoſitorum ſumma $=$

$$\frac{\alpha \cos A(s-\frac{1}{2}u)-(\alpha+p\beta)\cos A(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin A\frac{1}{2}u}-\frac{\beta \sin A s+\beta\sin(s+pu)}{4(\sin A\frac{1}{2}u)^2}$$

Coroll. 2.

24. Si ergo ſit $\alpha = 1$ & $\beta = 1$ erit hujus ſeriei:

$\sin A s+2\sin A(s+u)+3\sin A(s+2u)+\ldots\ldots+p\sin A(s+(p-1)u)$

$$\text{ſumma} = \frac{\cos A(s-\frac{1}{2}u)-(p+1)\cos A(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin A\frac{1}{2}u}-\frac{\sin A s+\sin A(s+pu)}{4(\sin A\frac{1}{2}u)^2}$$

Scholion.

25. Hæc eadem ſumma ſine ſubſidio lemmatis ex ſumma coſinuum ſimplicium ante inventa, ope differentiationis erui poteſt: Cum enim ſit

$\cos A s+\cos A(s+u)+\cos A(s+2u)+\ldots\ldots+\cos A(s+(p-1)u)$

$= \dfrac{-\sin A(s-\frac{1}{2}u)+\sin A(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin A\frac{1}{2}u}$; ponatur $s = a + \alpha x$ & $u = \beta x$ erit $\cos A(a+\alpha x)+\cos A(a+(\alpha+\beta)x)+\cos A(a+(\alpha+2\beta)x)+\ldots\ldots+\cos A(a+(\alpha+(p-1)\beta)x) =$

$$\frac{-\sin A(a+(\alpha-\frac{1}{2}\beta)x)+\sin A(a+(\alpha+p\beta-\frac{1}{2}\beta)x)}{2\sin A\frac{1}{2}\beta x}.$$

Jam differentietur hæc æquatio poſito x variabili, & diviſione per $-dx$ facta habebitur:

$\alpha\sin A s+(\alpha+\beta)\sin A(s+u)+\ldots\ldots+(\alpha+(p-1)\beta)\sin A(s+(p-1)u)$

$$= \frac{(\alpha-\frac{1}{2}\beta)\cos A(s-\frac{1}{2}u)-(\alpha+(p-\frac{1}{2})\beta)\cos A(s+(p-\frac{1}{2})u}{2\sin A\frac{1}{2}u}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}\beta\,\text{coſ}\,A\,\tfrac{1}{2}u.\,\text{ſin}\,A\,(s-\tfrac{1}{2}u)+\tfrac{1}{2}\beta\,\text{coſ}\,A\,\tfrac{1}{2}u.\,\text{ſin}\,A\,(s+(p-\tfrac{1}{2})u)}{2\,(\text{ſin}\,A\,\tfrac{1}{2}u)^2}$$

quæ expreſſio facile ad ſormam primum inventam reducitur.

Coroll. 3.

26. Ex inventa ſumma ſeriei ſinuum propoſitæ per differentiationem poſito u conſtante & s variabili orietur ſumma ſimilis ſeriei coſinuum:

$$\alpha\,\text{coſ}\,A\,s+(\alpha+\beta)\,\text{coſ}\,A\,(s+u)+(\alpha+2\beta)\,\text{coſ}\,A\,(s+2u)+\ldots$$

$$\ldots\ldots+(\alpha+(p-1)\beta)\,\text{coſ}\,A\,(s+(p-1)u)=\frac{-\alpha\,\text{ſin}\,A\,(s-\tfrac{1}{2}u)}{2\,\text{ſin}\,A\,\tfrac{1}{2}u}$$

$$+\frac{(\alpha+p\beta)\,\text{ſin}\,A\,(s+(p-\tfrac{1}{2}u)}{2\,\text{ſin}\,A\,\tfrac{1}{2}u}-\frac{\beta\,\text{coſ}\,A+\beta\,\text{coſ}\,A\,s\,(s+pu)}{4\,(\text{ſin}\,A\,\tfrac{1}{2}u)^2}$$

Lemma 3.

27. Hujus formulæ differentialis $\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^{2n}}$, in qua m eſt numerus minor quam $2n$, integrale eſt

$$\mp\frac{1}{2n}\,\text{coſ}\,A\,\frac{m\pi}{2n}\,l\,(1+2x\,\text{coſ}\,A\,\frac{\pi}{2n}+xx)\mp\frac{1}{n}\,\text{ſin}\,A\,\frac{m\pi}{2n}\,A\,\text{tang.}\,\frac{x\,\text{ſin}\,A\,\frac{\pi}{2n}}{1+x\,\text{coſ}\,A\,\frac{\pi}{2n}}$$

$$\mp\frac{1}{2n}\,\text{coſ}\,A\,\frac{3m\pi}{2n}\,l\,(1+2x\,\text{coſ}\,A\,\frac{3\pi}{2n}+xx)\mp\frac{1}{n}\,\text{ſin}\,A\,\frac{3m\pi}{2n}\,A\,\text{tang.}\,\frac{x\,\text{ſin}\,A\,\frac{3\pi}{2n}}{1+x\,\text{coſ}\,A\,\frac{3\pi}{2n}}$$

$\mp$

$$\mp \frac{1}{2n} \operatorname{cof} A \frac{5m\pi}{2n} l\left(1+2x\operatorname{cof} A \frac{5\pi}{2n} + xx\right) \mp \frac{1}{n} \operatorname{fin} A \frac{5m\pi}{2n} A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{fin} A \frac{5\pi}{2n}}{1+x\operatorname{cof} A \frac{5\pi}{2n}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mp \frac{1}{2n} \operatorname{cof} A \frac{(2n-1)m\pi}{2n} l\left(1+2x\operatorname{cof} A \frac{(2n-1)\pi}{2n} + xx\right) \mp \frac{1}{n} \operatorname{fin} A \frac{(2n-1)m\pi}{2n} A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{fin} A \frac{(2n-1)\pi}{2n}}{1+x\operatorname{cof} A \frac{(2n-1)\pi}{2n}}$$

ubi ſigna ſuperiora valent ſi m fuerit numerus par, inferiora autem ſi m ſit numerus impar. Atque integrale hoc ita eſt acceptum, ut evaneſcat poſito $x = 0$.

Coroll. 1.

28. Hujus ergo formulæ differentialis $\frac{x^{2n-m-1}dx}{1+x^{2n}}$ integraele erit

$$\mp \frac{1}{2n} \operatorname{cof} A \frac{m\pi}{2n} l\left(1+2x\operatorname{cof} A \frac{\pi}{2n} + xx\right) \mp \frac{1}{n} \operatorname{fin} A \frac{m\pi}{2n} A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{fin} A \frac{\pi}{2n}}{1+x\operatorname{cof} A \frac{\pi}{2n}}$$

$$\pm \frac{1}{2n} \operatorname{cof} A \frac{3m\pi}{2n} \, l \left(1 + 2x \operatorname{cof} A \frac{3\pi}{2n} + xx\right) \mp \frac{1}{n} \operatorname{fin} A \frac{3m\pi}{2n} \operatorname{Atang.} \frac{x \operatorname{fin} A \frac{3\pi}{2n}}{1 + x \operatorname{cof} A \frac{3\pi}{2n}}$$

. . .

$$\pm \frac{1}{2n} \operatorname{cof} A \frac{(2n-1)m\pi}{2n} \, l \left(1 + 2x \operatorname{cof} A \frac{(2n-1)\pi}{2n} + xx\right) \mp \frac{1}{n} \operatorname{fin} A \frac{(2n-1)m\pi}{2n} \operatorname{A tang.} \frac{x \operatorname{fin} A \frac{(2n-1)\pi}{2n}}{1 + x \operatorname{cof} A \frac{(2n-1)\pi}{2n}}$$

ubi iterum ſigna ſuperiora valent, ſi m ſit numerus par, inferiora vero, ſin ſit numerus impar.

Coroll. 2.

29. Si ergo hæ ſormulæ differentiales addantur, in earum integrali quantitates logarithmicæ ſe deſtruunt, arcus circulares autem duplicabuntur, eritque ideo $\int \frac{x^{m-1} + x^{2n-m-1}}{1 + x^{2n}} dx =$

$$\mp \frac{2}{n} \operatorname{fin} A \frac{m\pi}{2n} \operatorname{A tang.} \frac{x \operatorname{fin} A \frac{\pi}{2n}}{1 + x \operatorname{cof} A \frac{\pi}{2n}} \mp \frac{2}{n} \operatorname{fin} A \frac{3m\pi}{2n} \operatorname{A tang.} \frac{x \operatorname{fin} A \frac{3\pi}{2n}}{1 + x \operatorname{cof} A \frac{3\pi}{2n}}$$

$$\overline{+}\ \frac{2}{n}\ \text{ſin A}\ \frac{5m\pi}{2}\ \text{A tang.}\frac{x\ \text{ſin A}\ \frac{5\pi}{2n}}{1+x\ \text{coſ A}\ \frac{5\pi}{2n}}\ \overline{+}\ -\ -\ -\ -$$

$$-\ -\ -\ \overline{+}\ \frac{2}{n}\ \text{ſin A}\ \frac{(2n-1)m\pi}{2n}\ \text{A tang.}\frac{x\ \text{ſin}\ A\ \frac{(2n-1)\pi}{2n}}{1+x\ \text{coſ A}\ \frac{(2n-1)\pi}{2n}}$$

ubi ſigna ſuperiora valent, ſi m fuerit numerus par, inferiora autem, ſin m ſit impar: denotatque perpetuo π arcum 180° in circulo cujus radius $=1$.

Problema. 6.

30. Invenire integrale formulæ differentialis $\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^{2n}}$, caſu quo poſt integrationem ponitur $x=\infty$.

Solutio.

Si in partibus integralis ante exhibiti logarithmicis ponatur $x=\infty$. exabibunt in $\mp\frac{lx}{n}$ (coſ A $\frac{m\pi}{2n}$ + coſ A $\frac{3m\pi}{2n}$ + coſ A $\frac{5m\pi}{2n}$ + ... + coſ A $\frac{(2n-1)m\pi}{2n}$) quorum arcuum cum differentia conſtans ſit $=\frac{2m\pi}{2n}$ erit horum coſinuum ſumma $=$

$$\frac{-\ \text{ſin A o}\ \pi+\text{ſin A}\frac{2nm\pi}{2n}}{2\ \text{ſin A}\frac{m\pi}{2n}}=0;$$ etſi ergo x eſt infinitum tamen ejus logarithmus lx eſt ex minimo infinitorum ordine, hincque fit $o\,lx=o$; Caſu ergo $x=\infty$ in integrali

 omnia

omnia membra a logarithmis pendentia ſe deſtruunt; ac remanebunt tantum altera membra a quadratura circuli pendentia. Cum vero ob x infinitum fiat

$$A\,\text{tang.}\frac{x\,\text{ſin}\,A\,\frac{k\pi}{2n}}{1+x\,\text{coſ}\,A\,\frac{k\pi}{2n}} = A\,\text{tang.}\frac{\text{ſin}\,A\,\frac{k\pi}{2n}}{\text{coſ}\,A\,\frac{k\pi}{2n}} = \frac{k\pi}{2n}$$

erit integrale quæſitum caſu $x = \infty$; $=$

$$\mp\frac{\pi}{2nn}\left(\text{ſin}\,A\,\frac{m\pi}{2n}+3\,\text{ſin}\,A\,\frac{3m\pi}{2n}+5\,\text{ſin}\,A\,\frac{5m\pi}{2n}+\ldots\ldots+(2n-1)\,\text{ſin}\,A\,\frac{(2n-1)m\pi}{2n}\right)$$

Quæ ſeries ſinuum per probl. 5. in unam ſummam colligi poterit. Erit autem $\alpha = 1$, $\beta = 2$; $p = n$; deinde $s = \frac{m\pi}{2n}$; $u = \frac{2m\pi}{2n}$ & $\frac{1}{2}\ u = \frac{m\pi}{2n}$ ex quibus hujus ſeriei ſinuum ſumma colligitur eſſe

$$= \frac{1-(2n+1)\,\text{coſ}\,A\,m\pi}{2\,\text{ſin}\,A\,\frac{m\pi}{2n}} \frac{-2\,\text{ſin}\,A\,\frac{m\pi}{2n}+2\,\text{ſin}\,A\,\frac{(2n+1)m\pi}{2n}}{4\left(\text{ſin}\,A\frac{m\pi}{2n}\right)^2}$$

$$= \frac{\text{ſin}\,A\left(m\pi+\frac{m\pi}{2n}\right)}{2\left(\text{ſin}\,A\,\frac{m\pi}{2n}\right)^2} - \frac{(2n+1)\,\text{coſ}\,A\,m\pi}{2\,\text{ſin}\,A\frac{m\pi}{2n}} = \frac{-n\,\text{coſ}\,A\,m\pi}{\text{ſin}\,A\,\frac{m\pi}{2n}}$$

Quodſi jam fuerit m numerus par, erit $\text{coſ}\,A\,m\pi = +1$ ſin autem m ſit numerus impar, erit $\text{coſ}\,A\,m\,\pi = -1$ Signis ambiguis igitur ſumma ſuperior ſinuum ita exprimetur ut ſit $= \mp\frac{n}{\text{ſin}\,A\,\frac{m\pi}{2n}}$, quæ ducta in $\mp\ \frac{\pi}{2nn}$ dabit,

five

ſive m ſit numerus par ſive impar eandem integralis quæſiti quantitatem $= \frac{\pi}{2n \sin A \frac{m\pi}{2n}}$ ad hancque expreſſionem reducitur integrale hujus formulæ $\frac{x^{m-1}\, dx}{1 + x^{2n}}$, ſi poſt integrationem ponatur $x = \infty$. Q. E. J.

Coroll. 1.

32. Erit igitur $\int \frac{x^{p-1}\, dx}{1 + x^{q}} = \frac{\pi}{q \sin A \frac{p\pi}{q}}$ poſt integrationem poſito $x = \infty$, ſiquidem q fuerit numerus par; & exponens p minor exponente q.

Scholion.

32. Ut autem appareat, quemnam valorem habitura ſit formula $\int \frac{x^{p-1}\, dx}{1 + x^{q}}$, ſi q fuerit numerus impar, poſito poſt integrationem $x = \infty$; ponamus $x = y\, y$, atque formula noſtra tranſibit in hanc $2 \int \frac{y^{2p-1}\, dy}{1 + y^{2q}}$, qui caſus cum contineatur in propoſito, erit ejus valor poſito $y = \infty$ quo facto ſimul x fit infinitum, $= 2 . \frac{\pi}{2q \sin A \frac{p\pi}{q}}$ erit ergo quoque $\int \frac{x^{p-1}\, dx}{1 + x^{q}} = \frac{\pi}{q \sin A \frac{p\pi}{q}}$, poſito poſt integrationem

tionem $x = \infty$, ſi q fuerit numerus impar, Generaliter ergo quicunque fuerint numeri p & q dummodo $p-1$ ſit minor quam q, erit ſemper $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{q \sin A \frac{p\pi}{q}}$.

Oportet autem eſſe $p-1 < q$, quia alias integrale lemmate 3 datum non eſſet completum, verum inſuper membrum unum plurave algebraica reciperet, ob quæ integrale caſu $x = \infty$ ſemper fieret infinitum.

Coroll. 2.

33. Si ponamus $x = \frac{y}{(1-y^q)^{\frac{1}{q}}}$, erit $x = 0$ ſi $y = 0$ & $x = \infty$ ſi ponatur $y = 1$; tum autem fiet $dx = \frac{dy}{(1-y^q)^{\frac{1+q}{q}}}$; $1 + x^q = \frac{1}{1-y^q}$ & $x^{p-1} = \frac{y^{p-1}}{(1-y^q)^{\frac{p-1}{q}}}$, unde erit $\frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^q} = \frac{y^{p-1}\,dy}{(1-y^q)^{\frac{p}{q}}}$.

Quocirca integrando fiet $\int \frac{y^{p-1}\,dy}{(1-y^q)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\pi}{q \sin A \frac{p}{q}\pi}$ ſi poſt integrationem ponatur $y = 1$.

Problema. 7.

Problema. 7.

34. Invenire integrale formulæ differentialis

$\frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k}$, caſu quo poſt integrationem ponitur $x = \infty$.

Solutio.

Per reductionem formularum integralium erit $\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k}$

$$= \frac{x^p}{(k-1)q(1+x^q)^{k-1}} + \frac{(k-1)q-p}{(k-1)q} \int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^{k-1}}$$, ſi ergo

poſt integrationem, uti aſſumimus, ponatur $x = \infty$, membrum algebraicum ob $p < q\ (k-1)$ evanescit eritque:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k} = \frac{(k-1)q-p}{(k-1)q} \int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^{k-1}}.$$ Quamobrem

ſi loco k ſucceſſive ponamus numeros 2, 3, 4, 5, &c. omnes hæ formulæ integrales reducentur ad hanc

$\int \frac{x^{p-1}dx}{1+x^q}$, cujus valorem caſu $x = \infty$ vidimus eſſe

$= \frac{\pi}{q \text{ ſi A } \frac{p\pi}{q}}$; unde ſequentes nascentur integrationes.

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^2} = \frac{q-p}{p} \cdot \frac{\pi}{q \text{ ſin A } \frac{p\pi}{q}}$$

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x^q)^3} = \frac{(q-p)\;(2q-p)}{q\;.\;\;2q}\,.\,\frac{\pi}{q\,\text{ſin}\,A\frac{p\pi}{q}}$$

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x^q)^4} = \frac{(q-p)\;(2q-p)\;(3q-p)\,.}{q\,.\;\;2q\,.\;\;3q}\;\frac{\pi}{q\,\text{ſin}\,A\frac{p\pi}{q}}$$

&c.

Hincque generaliter concludetur fore

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x^q)^k} = \frac{(q-p)(2q-p)(3q-p)\ldots((k-1)q-p)}{q\,.\;\;2q\,.\;\;3q\;\ldots\;(k-1)q}\,.\,\frac{\pi}{q\,\text{ſin}A\frac{p\pi}{q}}$$

Q. E. J.

Coroll. 1.

35. Quoties ergo k fuerit numerus integer affirmativus, toties integrale formulæ $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x^q)^k}$ caſu quo $x = \infty$, per peripheriam circuli exprimi poteſt.

Coroll. 2.

36. Ex diſſertatione autem mea de progreſſionibus transcendentibus Tom. Comment. IV. colligitur eſſe

$$\frac{q\,.\;2q\,.\;3q\;\ldots\;(k-1)q}{(q-p)(2q-p)(3q-p)(\;\ldots\;((k-1)q-p)} = (kq-p)\int y^{q-p-1}\,dy$$

$(1-y^q)^{k-1}$ poſito poſt integrationem $y = 1$. Hinc ergo colligitur fore $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x^q)}\,.\,\int y^{q-p-1}\,dy\,(1-y^q)^{k-1}$

=

$$= \frac{\pi}{q(kq-p)\,\text{ſin}\,A\frac{p\pi}{q}}.$$

Coroll. 3.

37. Si ponamus $x = \frac{y}{(1-y^q)^{\frac{1}{q}}}$, ita ut poſito $y = 1$ fiat $x = \infty$, fiet $\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k} = \int y^{p-1} dy (1-y^q)^{\frac{(k-1)q-p}{q}}$ poſito ergo $y = 1$, fiet $\frac{\pi}{q(kq-p)\,\text{ſin}\,A\frac{p\pi}{q}} =$ $\int y^{q-p-1} dy\,(1-y^q)^{k-1}.\int y^{p-1} dy\,(1-y^q)^{\frac{(k-1)q-p}{q}}$. At eſt $\int y^{p-1} dy(1-y^q)^{\frac{(k-1)q-p}{q}} = \frac{kq}{kq-p}\int y^{p-1} dy(1-y^q)^{\frac{kq-p}{q}}$ ex quo erit $\int y^{q-p-1} dy(1-y^q)^{k-1}.\int y^{p-1} dy(1-y^q)^{\frac{kq-p}{q}}$ $= \frac{\pi}{kqq\,\text{ſin}\,A\frac{p\pi}{q}}$.

Problema 8.

38. Invenire integrale formulæ differentialis $\frac{x^{m-1}+x^{2n-m-1}}{1+x^{2n}}dx$, caſu quo poſt integrationem ponitur $x = 1$.

 Solutio.

Solutio.

Hujus formulæ differentialis integrale in genere exhibuimus (29). Poſito autem $x = 1$, quælibet forma a quadratura circuli pendens A tang. $\frac{x \text{ ſin A } \Phi}{1 + x \text{ coſ A } \Phi}$ abit in $\frac{\Phi}{2}$. Hinc formulæ propoſitæ integrale caſu $x = 1$ erit $= \mp$ $\frac{\pi}{2nn}$ (ſin A $\frac{m\pi}{2n}$ + 3 ſin A $\frac{3m\pi}{2n}$ + 5 ſin A $\frac{5m\pi}{2n}$ + &c. ...... + $(2n-1)$ ſin A $\frac{(2n-1)m\pi}{2n}$) quæ eſt illa ipſa ſinuum ſeries, quam in ſolutione probl. 6. ad ſummam definitam revocavimus; ubi pariter ſigna ſuperiora valent ſi m fuerit numerus par, inferiora ſin m numerus impar. Utroque ergo caſu ſive m ſit numerus par ſive impar integrale quæſitum erit idem, quod in problemate ſexto: ſcilicet poſito poſt integrationem $x = 1$ erit $\int \frac{x^{m-1} + x^{2n-m-1}}{1 + x^{2n}} dx =$ $\frac{\pi}{2n \text{ ſin A} \frac{m\pi}{2n}}$ Q. E. J.

Coroll. 1.

39. Erit ergo $\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx = \frac{\pi}{q \text{ ſin A} \frac{p\pi}{q}}$ poſito poſt integrationem $x = 1$; ſiquidem fuerit exponens $p-1$ minor exponente; uti ſupra annotavimus.

Scholion.

40. Simili modo, quo ſupra (32) uſi ſumus, oſtendi poteſt eundem

eundem integralis valorem locum obtinere, etiamſi q ſit numerus impar, ſit enim in formula $\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx$ exponens q numerus impar; ponamusque $x = yy$, abibit hæc formula in hanc $2 \int \frac{y^{2p-1} + y^{2q-2p-1}}{1 + y^{2q}} dy$, cujus utique integrale caſu quo $y = 1$ erit $=$ $2. \frac{\pi}{2 q \operatorname{ſin} A \frac{p\pi}{q}}$; erit ergo ſive q ſit numerus par ſive impar $\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx = \frac{\pi}{q \operatorname{ſin} A \frac{p\pi}{q}}$.

Coroll. 2.

41. Integralia igitur harum duarum formularum differentialium $\int \frac{x^{p-1} dx}{1 + x^q}$ & $\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx$ ſi in illa poſt integrationem ponatur $x = \infty$ in hac autem $x = 1$, erunt inter ſe æqualia, utroque ſcilicet caſu integrale eſt $=$ $\frac{\pi}{q \operatorname{ſin} A \frac{p}{q}\pi}$.

Coroll. 3.

42. Si in integrali $\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx$ ponatur integra-

tione peractâ $x = \infty$, erit ejus valor $=$

$$\frac{\pi}{q\,\text{ſin}\,A\,\frac{p\pi}{q}} + \frac{\pi}{q\,\text{ſin}\,A\,\frac{(q-p)\pi}{q}} = \frac{2\pi}{q\,\text{ſin}\,A\,\frac{p\pi}{q}}$$

; hoc ergo integrale duplo majus eſt; ſi ponatur $x = \infty$ quam ſi ponatur $x = 1$.

Lemma 4.

43. Hujus formulæ differentialis $\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^{2n}}$ in qua $m-1$ eſt numerus minor quam $2n$, integrale eſt:

$$\mp \frac{l(1+x) - l(1-x)}{2n}.$$

$$\mp \frac{1}{2n}\,\text{coſ}\,A\,\frac{m\pi}{n}\,l\left(1+2x\,\text{coſ}\,A\,\frac{\pi}{n}+xx\right) \pm \frac{1}{n}\,\text{ſin}\,A\,\frac{m\pi}{n}\,A\,\text{tang.}\,\frac{x\,\text{ſin}\,A\,\frac{\pi}{n}}{1+x\,\text{coſ}\,A\,\frac{\pi}{n}}$$

$$\mp \frac{1}{2n}\,\text{coſ}\,A\,\frac{2m\pi}{n}\,l\left(1+2x\,\text{coſ}\,A\,\frac{2\pi}{n}+xx\right) \pm \frac{1}{n}\,\text{ſin}\,A\,\frac{2m\pi}{n}\,A\,\text{tang.}\,\frac{x\,\text{ſin}\,A\,\frac{2\pi}{n}}{1+x\,\text{coſ}\,A\,\frac{2\pi}{n}}$$

$$\pm \frac{1}{2n}\,\text{coſ}\,A\,\frac{3m\pi}{2n}\,l\left(1+2x\,\text{coſ}\,A\,\frac{3\pi}{2n}+xx\right) \pm \frac{1}{n}\,\text{ſin}\,A\,\frac{3m\pi}{n}\,A\,\text{tang.}\,\frac{x\,\text{ſin}\,A\,\frac{3\pi}{n}}{1+x\,\text{coſ}\,A\,\frac{3\pi}{n}}$$

. . . .

$$\begin{matrix} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{matrix}$$

$$\pm \frac{1}{2n} \text{coſ} A \frac{(n-1)m\pi}{n}\, l\left(1+2x \text{coſ} A \frac{(n-1)\pi}{n} + xx\right) \pm \frac{1}{n} \text{ſin} A \frac{(n-1)m\pi}{n} A \text{ tang. } \frac{x \text{ ſin } A \frac{(n-1)\pi}{n}}{1+x \text{coſ} A \frac{(n-1)\pi}{n}}$$

ubi ſigna ſuperiora valent, ſi m eſt numerus impar, inferiora autem, ſi m fuerit numerus impar.

Coroll. 1.

44. Hinc iſtius formulæ differentialis $\frac{x^{2n-m-1}\,dx}{1-x^{2n}}$ integrale erit ſequens:

$$\pm \frac{1}{2n}\, l(1+x) - \frac{1}{2n}\, l(1-x)$$

$$\pm \frac{1}{2n} \text{coſ} A \frac{m\pi}{n}\, l\left(1+2x \text{coſ} A \frac{\pi}{n} + xx\right) \mp \frac{1}{n} \text{ſin} A \frac{m\pi}{n} A \text{tang.} \frac{x \text{ ſin } A \frac{\pi}{n}}{1+x \text{coſ} A \frac{\pi}{n}}$$

$$\pm \frac{1}{2n} \text{coſ} A \frac{2m\pi}{n}\, l\left(1+2x \text{coſ} A \frac{2\pi}{n} + xx\right) \mp \frac{1}{n} \text{ſin} A \frac{2m\pi}{n} A \text{tang.} \frac{x \text{ ſin } A \frac{2\pi}{n}}{1+x \text{coſ} A \frac{2\pi}{n}}$$

$\pm$

$$\pm \frac{1}{2n} \operatorname{coſ} A \frac{3m\pi}{n}\, l\left(1 + 2x \operatorname{coſ} A \frac{3\pi}{2n} + xx\right) \mp \frac{1}{n} \operatorname{ſin} A \frac{3m\pi}{n}$$

$$\text{A tang.} \frac{x \operatorname{ſin} A \frac{3\pi}{n}}{1 + x \operatorname{coſ} A \frac{3\pi}{n}}$$

. . . . . .

$$\pm \frac{1}{2n} \operatorname{coſ} A \frac{(n-1)m\pi}{n}\, l\left(1 + 2x \operatorname{coſ} A \frac{(n-1)\pi}{n} + xx\right) \mp \frac{1}{n} \operatorname{ſin} A$$

$$\frac{(n-1)m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{x \operatorname{ſin} A \frac{(n-1)\pi}{n}}{1 + x \operatorname{coſ} A \frac{(n-1)\pi}{n}}$$

ubi iterum ſigna ſuperiora locum habent, ſi m ſit numerus impar, inferiora vero, ſi m ſit numerus par.

Coroll. 2.

45. Si igitur hæc formula poſterior a priori ſubtrahatur, membra logarithmica ſe mutuo deſtruent, eritque hujus formulæ

$$\frac{x^{m-1} + x^{2n-m-1}}{1 + x^{2n}} dx \quad \text{integrale} =$$

$$\pm \frac{2}{n} \operatorname{ſin} A \frac{m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{x \operatorname{ſin} A \frac{\pi}{n}}{1 + x \operatorname{coſ} A \frac{\pi}{n}} \pm \frac{2}{n} \operatorname{ſin} A \frac{2m\pi}{n} \text{ A tang.}$$

$$\frac{x \operatorname{ſin} A \frac{2\pi}{n}}{1 + x \operatorname{coſ} A \frac{2\pi}{n}}$$

$$\mp \tfrac{2}{n}\ \text{ſin}\ A\,\tfrac{3m\pi}{n}\,A\,\text{tang.}\frac{x\ \text{ſin}\ A\,\frac{3\pi}{n}}{1 + x\,\text{coſ}\,A\,\frac{3\pi}{n}} \pm - \quad -$$

$$- \quad - \quad - \qquad \tfrac{2}{n}\ \text{ſin}\ A\,\tfrac{(n-1)m\pi}{n}\,A\,\text{tang.}\frac{x\,\text{ſin}\,A\,\frac{(n-1)\pi}{n}}{1 + x\,\text{coſ}\,A\,\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

ubi ſignorum ambiguorum valor ſe habet ut ante.

Problema. 9.

46. Invenire integrale hujus formulæ differentialis $\frac{x^{m-1} - x^{2n-m-1}}{1 - x^{2n}}\,dx$, eo caſu, quo poſt integrationem abſolutam ponitur $x = 1$.

Solutio.

Quoniam caſu $x = 1$ eſt $A\,\text{tang.}\frac{x\,\text{ſin}\,A\,\Phi}{1 + x\,\text{coſ}\,A\,\Phi} = A\,\text{tang.}\frac{\text{ſin}\,A\,\frac{1}{2}\Phi}{\text{coſ}\,A\,\frac{1}{2}\Phi} = \frac{1}{2}\Phi$, erit quæſitum integrale $= \pm \frac{\pi}{mn}\Big(\text{ſin}\,A\frac{m\pi}{n} + 2\,\text{ſin}\,A\frac{2m\pi}{n} + 3\,\text{ſin}\,A\,\frac{3m\pi}{n} + \ldots\ldots\ldots + (n-1)\,\text{ſin}\,A\,\frac{(n-1)m\pi}{n}\Big)$ ubi ſignorum ambiguorum ſuperius $+$ valet, ſi m ſit numerus impar, inferius vero, ſi m ſit par. Hujus ergo ſeriei ſinuum ſumma per probl. 5. reperietur, eritque facta applicatione $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $p = n - 1$; $s = \frac{m\pi}{n}$; $u = \frac{m\pi}{n}$ & $\frac{1}{2}\,u = \frac{m\pi}{2n}$ hinc ſumma quæſita erit $=$

Y coſ.

$$\frac{\operatorname{cof} A\frac{m\pi}{2n} - n \operatorname{cof} A\left(m\pi - \frac{m\pi}{2n}\right)}{2 \operatorname{fin} A\frac{m\pi}{2n}}.$$

$$\frac{-\operatorname{fin} A\frac{m\pi}{2n} + \operatorname{fin} A\, m\pi}{4\left(\operatorname{fin} A\frac{m\pi}{2n}\right)^2}.$$ Quia vero eſt $\operatorname{fin} A\frac{m\pi}{n} = 2 \operatorname{fin} A\frac{m\pi}{2n} . \operatorname{cof} A\frac{m\pi}{2n}$; $\operatorname{fin} A\, m\pi = 0$ & $\operatorname{cof} A\left(m\pi - \frac{m\pi}{2n}\right) = \operatorname{cof} A\, m\pi . \operatorname{cof} A\frac{m\pi}{2n}$; erit ſumma ſeriei ſinuum inventæ $= \frac{-n \operatorname{cof} A\, m\pi . \operatorname{cof} A\frac{m\pi}{2n}}{2 \operatorname{fin} A\frac{m\pi}{2n}} = \frac{\pm n \operatorname{cof} A\frac{m\pi}{2n}}{2 \operatorname{fin} A\frac{m\pi}{2n}}$, ubi, ut ante, ſignum ſuperius locum habet, ſi m ſit numerus impar, inferius vero, ſi m ſit numerus par. Hoc modo ſignorum ambiguitas tollitur, eritque formulæ differentialis propoſitæ integrale caſu $x = 1$, ſive m ſit numerus impar ſive par, conſtanter $= \frac{\pi \operatorname{cof} A\frac{m\pi}{2n}}{2n \operatorname{fin} A\frac{m\pi}{2n}}$. Q. E. J.

Coroll. 1.

47. Si igitur poſt integrationem ita abſolutam ut integrale evaneſcat poſito $x = 0$ ponatur $x = 1$ erit

∫

$$\int \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} dx = \frac{\pi \operatorname{coſ} A \frac{p\pi}{q}}{q \operatorname{ſin} A \frac{p\pi}{q}}$$, ſiquidem q fuerit numerus par.

Coroll. 2.

48. Eadem igitur integratio caſu ſaltem $x = 1$ locum quoque habebit, ſi q fuerit numerus impar, cum poſitó $x = yy$ exponens ipſius y in denominatore par reddatur. Erit ergo generaliter, ſi poſt integrationem $x = 1$ ponatur

$$\int \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} dx = \frac{\pi \operatorname{coſ} A \frac{p\pi}{q}}{q \operatorname{ſin} A \frac{p\pi}{q}}.$$

Coroll. 3

49. Cum poſito pariter poſt integrationem $x = 1$ ſit

$$\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx = \frac{\pi}{q \operatorname{ſin} A \frac{p\pi}{q}}$$, ſi illa per

hanc dividatur erit $\int \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} dx = \operatorname{coſ} A \frac{p\pi}{q}$.

$\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx$, ſiquidem poſt utramque integrationem ponatur $x = 1$.

Lemma 5.

54. Hujus formulæ differentialis $\frac{x^{m-1} dx}{1 - 2bx^n + x^{2n}}$ ſi ponatur

n nume-

n numerus par, ac ſtatuatur $n - m = i$ itemque capiatur angulus ω cujus coſinus ſit $= b$, erit integrale ſequens expreſſio:

$$\pm \frac{\text{ſin A}\,\frac{i}{n}\,\omega}{2n\,\text{ſin A}\,\omega}\, l\left(1+2x\,\text{coſA}\,\frac{\omega}{n}+xx\right) \pm \frac{\text{coſA}\,\frac{i}{n}\,\omega}{n\,\text{ſin A}\,\omega}$$

$$\text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin}\,A\,\frac{\omega}{n}}{1+x\,\text{coſ A}\,\frac{\omega}{n}}$$

$$\pm \frac{\text{ſin A}\,\frac{i}{n}\,(2\pi+\omega)}{2n\,\text{ſin A}\,\omega}\, l\left(1+2x\,\text{coſ}A\,\frac{2\pi+\omega}{n}+xx\right) \pm \frac{\text{coſA}\,\frac{i}{n}(2\pi+\omega)}{n\,\text{ſin A}\,\omega}$$

$$\text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin A}\,\frac{2\pi+\omega}{n}}{1+x\,\text{coſA}\frac{2\pi+\omega}{n}}$$

$$\pm \frac{\text{ſin}\,A\,\frac{i}{n}\,(4\pi+\omega)}{2n\,\text{ſin A}\,\omega}\, l\left(1+2x\,\text{coſA}\frac{4\pi+\omega}{n}+xx\right) \pm \frac{\text{coſA}\,\frac{i}{n}(4\pi+\omega)}{n\,\text{ſin A}\,\omega}$$

$$\text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin A}\,\frac{4\pi+\omega}{n}}{1+x\,\text{coſA}\frac{4\pi+\omega}{n}}$$

. . . . . .

$\pm$

$$\pm \frac{\text{ſin A}\frac{i}{n}(2(n-1)\pi+\omega)}{2n\ \text{ſin A}\ \omega}\, l\left(1+2x\,\text{coſ A}\frac{2(n-1)\pi+\omega}{n}+xx\right) \pm \frac{\text{coſ A}\frac{i}{n}(2(n-1)\pi+\omega)}{n\ \text{ſin A}\ \omega}$$

$$\text{A tang.}\frac{x\ \text{ſin A}\ \frac{2(n-1)\pi+\omega}{n}}{1+x\,\text{coſ A}\frac{2(n-1)\pi+\omega}{n}}$$

ubi ſigna ſuperiora valent, ſi i eſt numerus impar, inferiora autem, ſi i ſit numerus par. Quod ſi autem n fuiſſet numerus impar, tum non ſolum hæc ſignorum lex debet commutari, ſed etiam pro ω debet capi angulus, cujus coſinus ſit $= -b$.

Problema 10.

51. Invenire integrale hujus formulæ differentialis $\frac{x^{m-1}\,dx}{1-2bx^n+x^{2n}}$ eo caſu, quo poſt integrationem ponitur $x = \infty$.

Solutio.

Integrale univerſaliter ſumtum conſtat duplici partium ordine, alter membra logarithmica complectitur, alter a quadratura circuli pendentia. Aſſumamus n eſſe numerum parem, ac ponamus $n-m = i$, ſitque ω arcus cujus coſinus $= b$. Poſito jam $x = \infty$ ſinguli logarithmi abibunt in $lx^2 = 2lx$, horumque ideo membrorum logarithmicorum ſumma erit $\frac{\mp\, l\, x}{n\ \text{ſin A}\omega}\left(\text{ſin A}\frac{i}{n}\ \omega + \text{ſin A}\frac{i}{n}\ (2\pi+\omega)\right.$

$\left.+ \ldots\ldots\ldots + \text{ſin A}\frac{i}{n}\ (2\,(n-1)\ \pi + \omega\ )\right)$

quo-

quorum ſinuum omnium ſumma reperitur $=$

$$\frac{\operatorname{coſ} A \frac{i}{n} (\omega - \pi) - \operatorname{coſ} A \frac{i}{n} ((2n-1)\pi + \omega)}{2 \operatorname{ſin} A \frac{i\pi}{n}}$$, cum autem

hi anguli differant integra peripheria 2π aliquoties ſumta, erunt eorum cosinus æquales, hincque ſumma omnium membrorum logarithmicorum in integrali $= 0$. Supererunt ergo tantum membra a quadratura circuli pendentia, quæ caſu $x = \infty$, ita ſehabebunt, $\pm \frac{1}{nn \operatorname{ſin} A\omega} (\omega \operatorname{coſ} A \frac{i}{n} \omega + (2\pi + \omega) \operatorname{coſ} A \frac{i}{n} (2\pi + \omega) + (4\pi + \omega) \operatorname{coſ} A \frac{i}{n} (4\pi + \omega) + \ldots + (2(n-1)\pi + \omega) \operatorname{coſ} A \frac{i}{n} (2(n-1)\pi + \omega))$

Hæc jam coſinuum ſeries per (26) ſummabitur, factaque comparatione erit $\alpha = \omega$; $\beta = 2\pi$; $s = \frac{i\omega}{n}$ $u = \frac{2i\pi}{n}$, & $p = n$, unde obtinetur ſumma horum cosinuum $=$

$$\frac{-\omega \operatorname{ſin} A \frac{i}{n} (\omega - \pi) + (\omega + 2n\pi) \operatorname{ſin} A \frac{i}{n} (\omega + (2n-1)\pi)}{2 \operatorname{ſin} A \frac{i\pi}{n}}$$

$$\frac{-\pi \operatorname{coſ} A \frac{i\omega}{n} + \pi \operatorname{coſ} A \frac{i}{n} (\omega + 2n\pi)}{2 \left(\operatorname{ſin} A \frac{i\pi}{n}\right)^2} = \frac{n\pi \operatorname{ſin} A \frac{i}{n} (\omega - \pi)}{\operatorname{ſin} A \frac{i\pi}{n}}$$

Integrale

Integrale ergo quæſitum eſt $= \pm \dfrac{\pi \text{ ſin A} \frac{i}{n} (\omega - \pi)}{n \text{ ſin A}\omega . \text{ ſin A} \frac{i\pi}{n}}$

ſublata autem ſignorum ambiguitate erit formulæ differentialis propoſitæ integrale caſu $x = \infty$, hoc

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{1-2bx^n+x^{2n}} = \frac{\pi \text{ ſin A} \frac{i}{n} (\pi-\omega)}{n \text{ ſin A}\omega . \text{ ſin A} \frac{i\pi}{n}}$$, exiſtente $i =$

$n-m$ & $\omega = \text{A coſ.} b$. Q. E. J.

Coroll. 1.

52. Si loco m ſcribatur $2n-m$ tum i in ſui negativum abit, quo ipſo integrale non afficitur, erit ergo

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{1-2bx^n+x^{2n}} = \int \frac{x^{2n-m-1} dx}{1-2bx^n+x^{2n}}$$ caſu quo ponitur $x = \infty$.

Coroll. 2.

53. Si fiat $m=n$ tum erit $i = 0$; quo caſu cum ſinus arcuum evaneſcentium ſint ipſis arcubus æquales, fiet

$$\int \frac{x^{n-1} dx}{1-2bx^n+x^{2n}} = \frac{\pi - \omega}{n \text{ ſin A}\omega}$$ poſito $x = \infty$; cujus veritas facile poteſt comprobari.

Scholion.

54. Aſſumsimus hic b eſſe numerum unitate ſeu ſinu toto minorem, alioquin non daretur arcus ω, cujus coſinus eſſet $= b$.

$= b$. Ideo autem hunc caſum præ reliquis elegi, quod denominator $1 - 2bx^n + x^{2n}$ non in duos factores reales binomiales reſolvi poteſt. Quoties enim ejusmodi reſolutio locum habet, facilius per præcedentia opus expediri poteſt.

Problema 11.

55. Invenire integrale hujus formulæ differentialis

$\frac{x^{p-1}\,dx}{1+ax^q}$, caſu tantum quo poſt integrationem ponitur $x = \infty$.

Solutio.

Ponatur $ax^q = y^q$ ſeu $x = a^{\frac{-1}{q}}y$, quo facto formula propoſita abibit in hanc $\frac{a^{\frac{-p}{q}}y^{p-1}\,dy}{1+y^q}$, cujus integrale caſu $y = \infty$ eſt $= \frac{\pi}{a^{\frac{p}{q}}q\,\text{ſin}A\frac{p\pi}{q}}$. Cum autem poſito $y = \infty$ ſimul fiat $x = \infty$ erit quoque hoc caſu

$$\int\frac{x^{p-1}\,dx}{1+ax^q} = \frac{\pi}{a^{\frac{p}{q}}q\,\text{ſin}A\frac{p\pi}{q}}.$$ Q. E. J.

Coroll. 1.

56. Erit igitur ſumto quocunque multiplo

$\int\frac{mx^{p-1}\,dx}{1+ax^q} = \frac{m\pi}{a^{\frac{p}{q}}q\,\text{ſin}A\frac{p\pi}{q}}$ ſi poſt integrationem ponatur $x = \infty$.

Coroll.

Coroll. 2.

37. Cum igitur ſimili modo ſit $\int \frac{n x^{p-1} dx}{1 + b x^q} = \frac{n \pi}{b^{\frac{p}{q}} q \text{ ſin A } \frac{p \pi}{q}}$, erit duas hujusmodi formulas addendo $\int \frac{(m+n) x^{p-1} dx + (mb + na) x^{p+q-1} dx}{1 + (a+b) x^q + a b x^{2q}} = \frac{\pi}{q \text{ ſin A } \frac{p\pi}{q}} \left(\frac{m}{a^{\frac{p}{q}}} + \frac{n}{b^{\frac{p}{q}}} \right)$, poſito poſt integrationem $x = \infty$.

Problema. 12.

58. Si ponatur poſt integrationem $x = \infty$, invenire valorem hujus integralis $\int \frac{x^{p-1} dx}{1 + 2 f x^q + g x^{2q}}$.

Solutio.

Comparata hac formula cum coroll. præced. fiet $2f = a + b$ & $g = ab$ unde $2\sqrt{(ff - g)} = a - b$, hincque $a = f + \sqrt{(ff - g)}$ & $b = f - \sqrt{(ff - g)}$. Porro autem erit $m + n = 1$ & $mb + na = 0$ ſeu $(m+n) f = (m-n) \sqrt{(ff-g)}$, ideoque $m - n = \frac{f}{\sqrt{(ff-g)}}$. Erit ergo $m = \frac{f + \sqrt{(ff-g)}}{2\sqrt{(ff-g)}}$ & $n = \frac{-f + \sqrt{(ff-g)}}{2\sqrt{(ff-g)}}$. His valorib9 inventis obtinebitur integrale quæſitum $\int \frac{x^{p-1} dx}{1 + 2 f x^q + g x^{2q}}$

$$= \frac{\pi}{2q \sin A\frac{p\pi}{q}} \left(\frac{(f + \sqrt{(ff-g)})^{\frac{q-p}{q}} - (f - \sqrt{(ff-g)})^{\frac{q-p}{q}}}{\sqrt{(ff-g)}} \right)$$

ſi quidem poſt integrationem ponatur $x = \infty$. Q. E. J.

Coroll. 1.

59. Quodſi ergo f & g fuerint quantitates reales affirmativæ, atque fuerit $ff > g$, tum integrale inventum terminis realibus erit expreſſum. Sin autem g fuerit quantitas negativa, tum b erit negativum: hoc que caſu integrale inventum locum habere nequit. Idem incommodum evenit; ſi f fuerit numerus negativus, exiſtente $ff > g$, tum enim a & b fient numeri negativi, neque idcirco formularum ſimplicium $\frac{x^{p-1}\,dx}{1-ax^q}$ & $\frac{x^{p-1}\,dx}{1-bx^q}$ integralia caſu $x = \infty$ exhiberi poterunt.

Coroll. 2.

60. Sin autem ſit $g > ff$, tum utraque quantitas a & b fiet imaginaria, niſi igitur imaginaria in integrali invento ſe deſtruant, valor formulæ propoſitæ caſu $x = \infty$ exhiberi non poterit.

Scholion.

61. Ponamus ergo eſſe $g > ff$, ſitque ω angulus, cujus coſinus ſit $= \frac{f}{\sqrt{g}}$, erit $\frac{\sqrt{(ff-g)}}{\sqrt{g}} = \sin A\,\omega.\sqrt{-1}$, hincque

$$(f + \sqrt{(ff-g)})^{\frac{q-p}{q}} = (\cos A\omega + \sqrt{-1}.\sin A\omega)^{\frac{q-p}{q}}$$

g

$g^{\frac{q-p}{2q}}$ & $(f - \sqrt{(ff-g)})^{\frac{q-p}{q}} = (\text{coſ} A\,\omega - \sqrt{-1}.\text{ſin} A\omega)^{\frac{q-p}{q}}$. $g^{\frac{q-p}{2q}}$. At eſt $(\text{coſ} A\,\omega \pm \sqrt{-1}.\,\text{ſin} A\,\omega)^{\frac{q-p}{q}} = \text{coſ} A$ $\frac{(q-p)\,\omega}{q} \pm \sqrt{-1}.\,\text{ſin} A\,\frac{(q-p)\,\omega}{q}$. Ex quibus formulæ propoſitæ $\frac{x^{p-1}\,dx}{1 + 2fx^q + xg^{2q}}$ caſu quo $g > ff$ integrale erit, ſi poſt integrationem $x = \infty$ ponatur $= \frac{\pi}{g^{\frac{p}{2q}q}\ \text{ſin} A\,\frac{p\pi}{q}}$. $\frac{\text{ſin} A\,\frac{(q-p)\,\omega}{q}}{\text{ſin} A\,\omega}$ exiſtente coſ $A\,\omega = \frac{f}{\sqrt{g}}$. Quod, ſi loco ω ſcribamus $\pi - \omega$, & i loco $q-p$ atque n loco q, congruit cum integrali pro eodem caſu in problemate 10 invento.

Fig: 1.

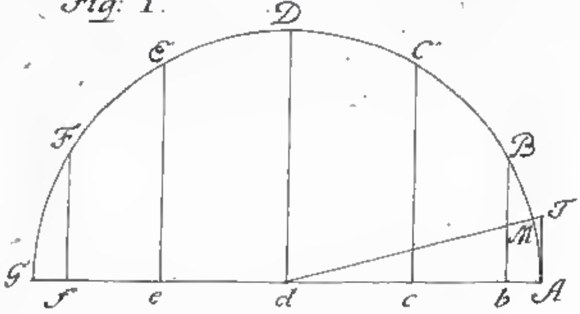


Fig: 3

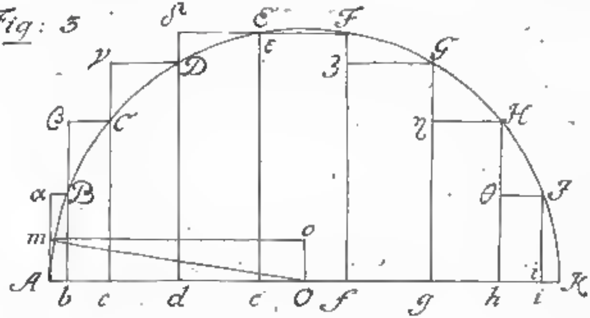


Fig: 2.

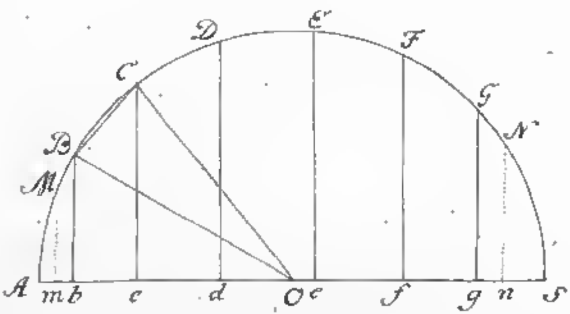
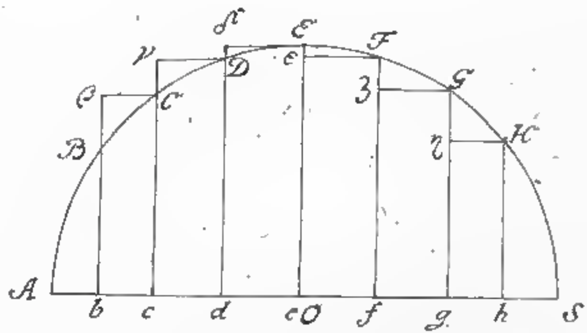


Fig 4.



F. sc.

Num. IV.

Ejusdem

De ſummis ſerierum reciprocarum ex poteſtatibus numerorum naturalium ortarum Diſſertatio altera:

in qua

eædem ſummationes ex fonte maxime diverſo derivantur.

§. I.

Poſtquam ante complures annos ſummas ſerierum in hac forma generali contentarum $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} +$ &c. in infinitum, ſi n fuerit numerus par poſitivus, ſimulque etiam harum ſerierum, ſi n fuerit numerus impar $1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} +$ &c. in infinitum, ope quadraturæ circuli exhibuiſſem, atque oſtendiſſem, ſummam perpetuo per eandem peripheriæ circuli dignitatem, quam exponens n indicet, exprimi: argumentum hoc acutiſſimis Geometris tantopere placuit, ut id non ſolum maxime probarent, verum etiam ipſi

ipſi ſtudium atque operam ad easdem ſummas methodis ſibi familiaribus eruendas impenderent. Ego quoque ab illo tempore multum fui occupatus in alia via inveſtiganda, quæ eodem deduceret, non tam ut veritatem inventam magis confirmarem, quam ut limites analyſcos in hujus generis ſeriebus tractandis ulterius extenderem.

§. II.

Methodus, quæ me ad iſtarum ſerierum ſummationem manuduxit, utique erat nova, & in ejusmodi inſtituto plane non uſitata: nitebatur enim in reſolutione æquationis infinitæ, cujus omnes radices, quarum numerus erat infinitus, noſſe oportebat. Contemplatus ſum namque hanc æquationem in infinitum excurrentem:

$$x = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \frac{s^7}{5040} + \frac{s^9}{362880} - \&c.$$

quæ continet relationem inter arcum circuli s & ejus ſinum x, ſinu toto poſito $= 1$. Cum autem eidem ſinui x innumerabiles arcus tam affirmativi quam negativi reſpondeant; hoc modo iſtius æquationis radices innumeras a poſteriori eram conſecutus; & quoniam coefficientes cujusque æquationis a radicibus pendent, ex comparatione iſtorum coefficientium cum radicibus æquationis perveni ad ſummas ſerierum ante memoratarum.

§. III.

Statim quidem facile perſpexi, iſtam methodum tutam eſſe, atque ad veritatem perducere non poſſe, niſi conſtaret

 æqua.

æquationem illam gradus infiniti alias radices, præter eas, quas natura ſinuum mihi ſuppeditaverat, in ſe non complecti: Quam vis enim intelligerem, alias radices reales, præter aſsignatas, in illa æquatione non contineri, tamen merito dubitare conveniebat, an non radices imaginariæ ineſſent, quod ſi eveniſſet, cunctæ ſummationes, quas inde elicui, cum veritate conſiſtere non potuiſſent. In hoc porro dubio confirmabar, cum ſimili modo ex arcu elliptico ejus ſinum ſeu applicatam reſpondentem per ſeriem expresſiſſem: quanquam enim pariter innumerabiles arcus elliptici præſto erant, qui ad eundem ſinum referantur, tamen ex iis nullas ſerierum ſummas, quæ veritati eſſent conſentaneæ, deducere licuerat: cujus incommodi ratio procul dubio in pluribus ac fortaſſe infinitis radicibus imaginariis erat poſita, quæ in illam æquationem ex ellipſi formatam ingrediuntur.

§. IV.

Quoniam igitur illo tempore nullam habueram demonſtrationem, qua mihi certo conſtaret, æquationem inter arcum circuli s ejusque ſinum x radicibus imaginariis omnino carere: ſummas ſerierum inventas ad trutinam veritatis examinare cœpi: ac primo quidem ſtatim deprehendi, hanc methodum eandem ſummam ſeriei:

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \text{ \&c.}$$

præbere, quam jam pridem Leibnitius aſſignaverat quæ convenientia ſatis declarabat, ſi quas æquatio radices imaginarias contineret, earum ſummam neceſſario eſſe $= 0$. Deinde

ſeries

ſeries altiorum poteſtatum ita examinavi, ut ſummas hac methodo inventas cum ſummis, quas paulo ante per approximationem erueram, compararem; in quo negotio denuo conſenſum deprehendi. Atque ob has rationes penitus confirmabar, nullis omnino radicibus imaginariis æquationem illam, quæ me ad omnes illas ſummas perduxerat, eſſe inquinatam; ſicque non dubitavi iſtas ſummas tanquam veriſſimas producere.

§. V.

In hac opinione autem prorſus me corroborabat alia methodus mere analytica, cujus ope deinceps per ſolas integrationes eandem ſummam hujus ſeriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} +$ &c. elicueram, ſimilique fere modo hanc eandem ſummam demonſtratam dedit Vir longe acutiſſimus Nicolaus Bernoulli, in ſchediasmate Tomo IX. Comment. Accad. Petropol. inſerto. Quanquam autem hoc modo calculus analyticus ad easdem ſummas omnes eruendas traduci poſſe videbatur; tamen neque ego neque quisquam alius pari calculo ad poteſtates altiores pertingere potuimus. Quod me fere eo impulit, ut crederem, aliam viam præter reſolutionem æquationis infinitæ non patere, quæ omnium poteſtatum ſummas junctim præberet.

§. VI.

Curam hanc fere penitus oblitam nuper in me renovaverunt litteræ a Viro Celeb. Daniele Bernoulli acceptæ, in quibus mihi easdem dubitandi rationes circa meam methodum objicit, ſimulque ſignificavit Celeberrimum Cramerum

rum iisdem dubiis præpediri, quominus methodum meam probare queat. Iſtæ igitur admonitiones amiciſſimæ eo me redegerunt, ut univerſum negotium de novo ruminarer, atque cum in methodi bonitate demonſtranda, tum in alia via easdem ſeries ſummandi exquirenda laborarem. In utroque igitur inſtituto voti plene compos factus, duplex negotium in hac diſſertatione abſolvam. Primum ſcilicet demonſtrabo, in æquatione infinita ſupra commemorata radices imaginarias nullas contineri, hincque de ſummarum inde deductarum veritate amplius dubitari non licere. Secundo vero loco novam ac non ſolum a prima maxime diverſam methodum, ſed etiam ad plurima alia luſtranda campum aperientem proponam, quæ per ſolas integrandi regulas totum negotium conficiat.

§. VII.

Demonſtrationem primum promiſſam impetravi ex reſolutione hujus binomii $a^n + b^n$ in factores ſuos reales. Unus quisque enim hujus binomii factor continetur in hac forma $aa - 2ab \operatorname{coſ} A \frac{(2k-1)\pi}{n} + bb$ atque omnes factores obtinentur, ſi loco $2k - 1$ ſucceſſive omnes numeri impares minores exponente n ſubſtituantur: &, ſi n fuerit numerus impar, tum præter hos factores trinomiales adjungi debet factor ſimplex $a + b$. Quod ſi habeatur reſiduum $a^n - b^n$ ejus primo factor eſt ſimplex $a - b$; factores reliqui trinomiales reales continentur in hac forma $aa - 2ab \operatorname{coſ} A \frac{2k\pi}{n}$
$+ bb$;

$+ bb$; cunctique hujus generis factores obtinentur, ſi loco $2k$ ſucceſſive omnes numeri pares (cyphra excepta) minores exponente n ſcribantur: &, ſi n ipſe fuerit numerus par, præterea factor adjici debet ſimplex $a + b$. Hoc igitur modo omnes omnino formulæ $a^n \pm b^n$ factores reales exhiberi poterunt, quorum omnium productum hanc ipſam formulam reddat. Ceterum hic notandum eſt π denotare ſemi circumferentiam circuli, cujus radius $= 1$, ſeu π eſſe angulum duobus rectis æqualem.

§. VIII.

Hinc jam a priori aſſignare poſſum omnes radices ſeu factores hujus expreſſionis infinitæ

$$s - \frac{s^3}{1.2.3.} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.\ldots.7} + \frac{s^9}{1.2.3.\ldots9} - \&c.$$

Hæc enim expreſſio æquivalet iſti $\dfrac{e^{s\sqrt{-1}} - e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

denotante e numerum, cujus logarithmus eſt $= 1$. & cum ſit $e^z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ exiſtente n numero infinito, reducetur expreſſio infinita propoſita ad hanc: $\dfrac{\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$:

cujus primum factor ſimplex eſt s, quem quidem ipſa ſeriei inſpectio monſtrat. Ad reliquos factores eruendos comparo hanc expreſſionem cum forma $a^n - b^n$ erit $a = 1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}$; & $b = 1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}$; hincque $aa + bb = 2 -$

$\frac{2ss}{nn}$ & $2ab = 2 + \frac{2ss}{nn}$. Quilibet ergo factor continebitur in hac forma $2 - \frac{2ss}{nn} - 2(1 + \frac{ss}{nn}) \operatorname{coſ} A \frac{2k\pi}{n}$ hincque omnes omnino factores emergent, ſi pro $2k$ ſucceſſive omnes numeri pares in infinitum ſubſtituantur, propterea quod n denotat numerum infinitum.

§. IX.

Cum autem n ſit numerus infinitus, erit arcus $\frac{2k\pi}{n}$ infinite parvus, quoad $2k$ fiat quoque infinitus numerus, minor tamen quam n. Erit ergo $\operatorname{coſ} A \frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn}$, unde factor generalis tranſit in hanc formam: $-\frac{4ss}{nn} + \frac{4kk\pi\pi}{nn}$ ex quo, termino cognito ad unitatem reducto, naſcitur factor $1 - \frac{ss}{kk\pi\pi}$, qui loco k ſubſtitutis ſucceſſive omnibus numeris 1, 2, 3, &c. in infinitum præbet omnes factores. Quodſi autem k in infinitum abeat, ut $2k$ ad n acquirat rationem finitam, tum ob $\operatorname{coſ} A \frac{2k\pi}{n} < 1$ termini $\frac{ss}{nn}$ præ unitate non deſtructa evaneſcent, fietque factor $1 - \frac{2k\pi}{n}$ conſtans, ideoque in computum non venit, quod in eo arcus s non continetur.

§. X.

Hoc ergo pacto nacti ſumus omnes factores formulæ propoſitæ

$$s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3\ldots 7} + \&c.$$

quæ adeo exacte æqualis erit producto ex his infinitis factoribus conſtante:

$$s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{16\pi\pi}\right)\ \&c.$$

ex quorum cum coefficientibus terminorum ſeriei comparatione ſtatim ſequuntur ſummæ ſerierum

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \&c.$$

ſi m denotet numerum quemcunque parem, neque igitur amplius de earum veritate dubitari poteſt.

§. XI.

Simili modo ſi conſideremus hanc ſeriem:

$$1 - \frac{ss}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.3\ldots 6} + \frac{s^8}{1.2.3\ldots 8} - \&c.$$

ea reducetur ad hanc formam $\dfrac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n + \left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2}$

denotante n numerum infinitum. Diviſores ergo binomii $\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n + \left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n$ ſimul erunt diviſores ſeriei propoſitæ, & quidem omnes. Comparata hac forma cum $a^n + b^n$ erit $a = 1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}$; $b = 1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}$; $aa+bb = 2 - \frac{2ss}{nn}$

$\frac{2ss}{nn}$ & $2ab = 2 + \frac{2ss}{nn}$, unusquisque ergo formulæ propoſitæ diviſor continetur in hac expreſſione $2\left(1 - \frac{ss}{nn}\right) - 2\left(1 + \frac{ss}{nn}\right)$ coſ A $\frac{(2k-1)\pi}{n}$, vel hac $2\left(1 - \text{coſ A}\ \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) - \frac{2ss}{nn}\left(1 + \text{coſ A}\ \frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$. Cum autem in diviſore tantum ad incognitam reſpiciatur, erit diviſor quilibet $1 - \frac{ss\left(1 + \text{coſ A}\ \frac{(2k-1)\pi}{n}\right)}{nn\left(1 - \text{coſ A}\ \frac{(2k-1)\pi}{n}\right)}$ facto termino cognito unitati æquali, quia in ſerie ipſa primus terminus eſt $= 1$.

§. XII.

Ob n autem numerum infinitum erit $1 + \text{coſ A}\ \frac{(2k-1)\pi}{n} = 2$ & $1 - \text{coſ A}\ \frac{(2k-1)\pi}{n} = \frac{(2k-1)^2\pi\pi}{2nn}$ ex quo unusquisque diviſor erit $1 - \frac{4ss}{(2k-1)^2\pi\pi}$; & ſi loco $2k-1$ omnes numeri impares in infinitum usque ſubſtituantur, orientur omnes diviſores ſeriei propoſitæ

$1 - \frac{ss}{1.2.} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.\ldots.6} +$ &c. quæ ergo erit productum ex his factoribus numero infinitis:

$$\left(1 - \frac{4ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{25\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{49\pi\pi}\right) \text{ \&c.}$$

ex quorum comparatione cum ipſa ſerie, omnes ſeries poteſtatum ſummantur ut ante. Atque ſic demonſtratum eſt

æqua-

æquationes illas infinitas, quas illo tempore tractavi, alias radices non habere, præter eas, quas ex natura ſinuum & coſinuum a poſteriore ſum aſſecutus.

§. XIII.

Demonſtrata methodi, cujus ope antehac iſtiusmodi ſerierum ſummas asſignavi, bonitate, progredior ad alteram methodum ab hac prorſus diverſam explicandam, quæ ex ſolis calculi integralis principiis petita ſine ullis ambagibus earundem ſerierum ſummas mira facilitate ſuppeditat. Nititur autem iſta methodus duobus theorematis, quorum demonſtrationem in diſſertatione ſuperiori *de inventione integralium ſi quantitati variabili poſt integrationem definitus valor tribuatur*, dedi; unde ea ſine demonſtratione depromam. Primum ita ſe habet:

„ Formulæ differentialis $\frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx$ integrale ita
„ ſumtum, ut evaneſcat poſito $x = 0$, ſi poſt integratio-
„ nem ponatur $x = 1$, dabit hunc valorem $\frac{\pi}{q \sin A \frac{p\pi}{q}}$,
„ denotante π ſemicircumferentiam circuli, cujus radius $= 1$,
„ in quo circulo ſimul ſinum arcus $\frac{p\pi}{q}$ capi pono.

Alterum theorema huic fere ſimile ita ſe habet:

„ Formulæ differentialis hujus $\frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} dx$ integrale

„ ita ſumtum, ut evaneſcat poſito $x = 0$, ſi in eo poſt „ integrationem ponatur $x = 1$ dabit hunc valorem

$$\frac{\pi \cos A \frac{p\pi}{q}}{q \sin A \frac{p\pi}{q}}, \text{ ſeu } \frac{\pi}{q \tan A \frac{p\pi}{q}}.$$ Demonſtrationes horum theorematum ordine plano procedunt, primum enim ſecundum regulas conſuetas iſtarum formularum integralia generatim inveſtigavi, iisque inventis loco variabilis x unitatem poſui. Quo facto ad ſeriem ſinuum finitam adeo pertigi, quæ quia arcus in progreſſione arithmetica progrediebantur, ſummationem admittebat, hasque ipſas expresſiones præbebat.

§. XIV.

Sumamus jam priorem formulam integralem

$$\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx,$$ quæ in ſeriem reſoluta dabit duplicem progresſionem geometricam:

$$+ \int dx \, (x^{p-1} - x^{q+p-1} + x^{2q+p-1} - x^{3q+p-1} + \&c.)$$
$$+ \int dx \, (x^{q-p-1} - x^{2q-p-1} + x^{3q-p-1} - x^{4q-p-1} + \&c.)$$

Hujus igitur integrale ita acceptum ut evaneſcat poſito $x = 0$, ita per ſeriem exprimetur:

$$\frac{x^p}{p} + \frac{x^{q-p}}{q-p} - \frac{x^{q+p}}{q+p} - \frac{x^{2q-p}}{2q-p} + \frac{x^{2q+p}}{2q+p} + \frac{x^{3q-p}}{3q-p}$$

— &c. Quodſi nunc ponamus $x = 1$, erit per theorema prius hujus ſeriei:

$$\frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q-p}-\frac{1}{q+p}-\frac{1}{2q-p}+\frac{1}{2q+p}+\frac{1}{3q-p}-\frac{1}{3q+p}-\frac{1}{4q-p}$$

$+$ &c. ſumma $= \dfrac{\pi}{q \sin A \frac{p\pi}{q}}$.

§. XV.

Simili modo altera formula integralis:

$\int \dfrac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1-x^q} dx$ per ſeriem integrata dabit:

$$\frac{x^p}{p}-\frac{x^{q-p}}{q-p}+\frac{x^{q+p}}{q+p}-\frac{x^{2q-p}}{2q-p}+\frac{x^{2q+p}}{2q+p}-\frac{x^{3q-p}}{3q-p}+$$

&c. Quamobrem per alterum theorema ſi ponamus $x=1$, erit hujus ſeriei

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q-p}+\frac{1}{q+p}-\frac{1}{2q-p}+\frac{1}{2q+p}-\frac{1}{3q-p}+\frac{1}{3q+p}$$

$-$ &c. ſumma $= \dfrac{\pi \cos A \frac{p\pi}{q}}{q \sin A \frac{p\pi}{q}}$; dummodo fuerint p & q numeri affirmativi, atque $q > p$, id quod in ſequentibus ſemper aſſumi oportet: alioquin enim integrale hoc modo ſumtum non evaneſceret poſito $x = 0$.

§. XVI.

Sit $\frac{p}{q} = s$, atque ſeriebus inventis per q multiplicatis habebimus has binas ſeries ad ſummam finitam reductas:

π

$$\frac{\pi}{\text{ſin}\,A\,s\pi} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \frac{1}{3+s} - \&c.$$

$$\frac{\pi\,\text{coſ}\,A\,s\pi}{\text{ſin}\,A\,s\pi} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \frac{1}{3+s}$$

— &c. harumque ſerierum ſummæ veræ erunt, quicunque numerus per s indicetur, ſive rationalis ſive irrationalis, ſicque lex continuitatis non amplius infringitur ut ante, ubi loco p & q numeros integros accipi oportebat. Quin etiam hæ ſummæ a veritate non recedunt, etiamſi pro s numeri unitate majores ponantur. Si enim ſit $s = 1$ vel quilibet numerus integer, tum ſeries fiunt infinitæ ob unum terminum in infinitum abeuntem, ſimul vero ſummæ exhibitæ ob ſin $A\,s\pi = 0$ in infinitum excreſcunt. Hinc iſtæ ſummæ tam late patent, ut nullam prorſus reſtrictionem requirant.

§. XVII.

Ex his ſeriebus generalibus jam deducuntur ſeries pro quadratura circuli cum Leibnizii, tum Gregorii aliæque innumerabiles; quarum præcipuas hic exhibere lubet.

Sit $q = 2$ & $p = 1$ erit ſin $A\frac{\pi}{2} = 1$ & coſ $A\frac{\pi}{2} = 0$

hincque ſequentes ſeries naſcuntur

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{7} + \&c. \text{ ſive}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \&c. \text{ atque}$$

$\frac{O\pi}{2}$

$$\frac{0\,\pi}{2} = 1 - 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{7} + \&c.$$

quarum illa eſt ſeries Leibniziana, hæc vero ſe ſponte prodit.

Sit $q = 3$ & $p = 1$, erit ſin A $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ & coſ A $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, unde ſequentes ſeries naſcuntur

$$\frac{2\,\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \&c.$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \&c.$$

Sit $q = 4$; $p = 1$, erit ſin A $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & coſ A $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hincque ſequentes oriuntur ſeries

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{13} - \&c.$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \&c.$$

Sit $q = 6$; $p = 1$, erit ſin A $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ coſ A $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ unde ſequentes proficiſcuntur ſeries

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} - \tfrac{1}{19} - \tfrac{1}{23} + \&c.$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} - \tfrac{1}{23} + \&c.$$

Haſque ſeries omnes prior quoque methodus ſuppeditaverat.

§. XVIII.

Quoniam igitur vidimus ſummam hujus ſeriei

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{1-s}-\frac{1}{1+s}-\frac{1}{2-s}+\frac{1}{2+s}+\frac{1}{3-s}-\&c.\text{ eſſe}=\frac{\pi}{\text{ſin} A\pi s}$$

& hujus

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}-\frac{1}{2-s}+\frac{1}{2+s}-\frac{1}{3-s}+\&c.\text{ eſſe}=\frac{\pi\,\text{coſ} A\pi s}{\text{ſin} A\pi s}$$

quicunque valor litteræ s tribuatur; manifeſtum eſt, easdem æqualitates locum habere, ſi loco s ponatur $s+ds$, vel quod eodem redit, ſi illæ ſeries cum ſuis ſummis differentientur, poſita quantitate s variabili. Quare cum ſit $d.\text{ſin} A\pi s = \pi ds\,\text{coſ} A\pi s$, & $d.\text{coſ} A\pi s = -\pi ds\,\text{ſin} A\pi s$, erit ſumtis differentialibus, atque ubique per $-ds$ diviſione facta:

$$\frac{\pi\pi\,\text{coſ} A\pi s}{(\text{ſin} A\pi s)^2}=\frac{1}{ss}-\frac{1}{(1-s)^2}-\frac{1}{(1+s)^2}+\frac{1}{(2-s)^2}+\frac{1}{(2+s)^2}-\frac{1}{(3-s)^2}-\&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{(\text{ſin} A\pi s)^2}=\frac{1}{ss}+\frac{1}{(1-s)^2}+\frac{1}{(1+s)^2}+\frac{1}{(2-s)^2}+\frac{1}{(2+s)^2}+$$

&c. Quodſi ergo loco s reſtituatur $\frac{p}{q}$ & utrinque per qq dividatur, prodibunt ſequentes ſeries ſummatæ.

$$\frac{\pi\pi\,\text{coſ} A\frac{p\pi}{q}}{qq(\text{ſin} A\frac{p\pi}{q})^2}=\frac{1}{pp}-\frac{1}{(q-p)^2}-\frac{1}{(q+p)^2}+\frac{1}{(2q-p)^2}+\frac{1}{(2q+p)^2}+\&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{qq(\text{ſin}\,A\frac{p\pi}{q})^2} = \frac{1}{pp} + \frac{1}{(q-p)^2} + \frac{1}{(q+p)^2} + \frac{1}{(2q-p)^2} + \frac{1}{(2q+p)^2} + \&c.$$

§. XIX.

Ponamus eſſe $q = 2$ & $p = 1$, erit ſin $A\frac{\pi}{2} = 1$ & coſ $A\frac{\pi}{2} = 0$, unde ſequentes prodibunt ſeries:

$$0 = 1 - 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c.$$

quarum prioris veritas per ſe patet, poſterior vero huc redit:

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \&c.$$

Sit $q = 3$ & $p = 1$, erit ſin $A\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, & coſ $A\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, unde naſcentur iſtæ binæ ſeries.

$$\frac{2\pi\pi}{27} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} + \&c.$$

$$\frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \&c.$$

Sit $q = 4$ & $p = 1$, erit ſin $A\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & coſ $A\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ atque hinc orientur hæ duæ ſeries:

$$\frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \&c.$$

Sit $q = 6$ & $p = 1$, erit ſin A $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, & coſ A $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ quo caſu obtinebuntur iſtæ ſeries:

$$\frac{\pi\pi}{6\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{17^2} - \frac{1}{19^2} + \&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \&c.$$

Atque ex his ſeriebus non difficulter derivantur binæ illæ principales, quas præcedentis methodi ope in hoc genere elicui; nempe:

$$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \&c.$$

§. XX.

Quo facilius ſummæ altiorum poteſtatum per continuatam differentiationem inveniri queant; ſummas atque ſeries ſeorſim differentiemus. Sit igitur $\frac{\pi}{\text{ſin}\,A\,\pi s} = P$ & $\frac{\pi\,\text{coſ}\,A\,\pi s}{\text{ſin}\,A\,\pi s} = Q$; habebimusque ſequentes ſummationes per differentialia cujusque gradus ipſorum P & Q expreſſas:

$+P =$

$$+P = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \&c.$$

$$+Q = \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \&c.$$

$$\frac{-dP}{1ds} = \frac{1}{ss} - \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} - \frac{1}{(3-s)^2} - \&c.$$

$$\frac{-dQ}{1ds} = \frac{1}{ss} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{(3-s)^2} + \&c.$$

$$\frac{+ddP}{1.2\,ds^2} = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{(1-s)^3} - \frac{1}{(1+s)^3} - \frac{1}{(2-s)^3} + \frac{1}{(2+s)^3} + \frac{1}{(3-s)^3} - \&c.$$

$$\frac{+ddQ}{1.2\,ds^2} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{(1-s)^3} + \frac{1}{(1+s)^3} - \frac{1}{(2-s)^3} + \frac{1}{(2+s)^3} - \frac{1}{(3-s)^3} + \&c.$$

$$\frac{-d^3P}{1.2.3\,ds^3} = \frac{1}{s^4} - \frac{1}{(1-s)^4} - \frac{1}{(1+s)^4} + \frac{1}{(2-s)^4} + \frac{1}{(2+s)^4} - \frac{1}{(3-s)^4} - \&c.$$

$$\frac{-d^3Q}{1.2.3\,ds} = \frac{1}{s^4} + \frac{1}{(1-s)^4} + \frac{1}{(1+s)^4} + \frac{1}{(2-s)^4} + \frac{1}{(2+s)^4} + \frac{1}{(3-s)^4} + \&c.$$

Generaliter ergo habebitur iſta ſummatio:

 +

$$\frac{\pm d^{n-1}P}{1.2.3\ldots(n-1)ds^{n-1}} = \frac{1}{s^n} \pm \frac{1}{(1-s)^n} - \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \pm \frac{1}{(3-s)^n} + \&c.$$

$$\frac{\pm d^{n-1}Q}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)ds^{n-1}} = \frac{1}{s^n} \mp \frac{1}{(1-s)^n} + \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \mp \frac{1}{(3-s)^n} + \&c.$$

ubi ſigna ſuperiora valent, ſi n fuerit numerus impar, inferiora vero, ſi n ſit numerus par.

§. XXI.

Ad ſummas igitur has actu determinandas, neceſſe eſt, ut valores differentialium cujuscunque ordinis quantitatum P & Q eruamus: quod ut facilius & ſuccinctius fieri poſſit, ponamus ſin $A\,\pi\,s = x$, & coſ $A\,\pi\,s = y$; eritque $P = \frac{\pi}{x}$ & $Q = \frac{\pi y}{x}$. Porro vero erit $dx = \pi y ds$, & $dy = -\pi x ds$, unde per regulas differentiationis ſequentes obtinentur valores

$$P = \frac{\pi}{x}$$

$$-\frac{dP}{ds} = \frac{\pi\pi}{xx}\cdot y$$

$$+\frac{ddP}{ds^2} = \frac{\pi^3}{x^3}\ (y^2+1)$$

$$-\frac{d^3P}{ds^3} = \frac{\pi^4}{x^4}\,(y^3+5y)$$

$$+\frac{d^4P}{ds^4} = \frac{\pi^5}{x^5}\,(y^4+18y^2+5)$$

$$-\frac{d^5P}{ds^5} = \frac{\pi^6}{x^6}\,(y^5+58y^3+61y)$$

$$+\frac{d^6P}{ds^6} = \frac{\pi^7}{x^7}\,(y^6+179y^4+479y^2+61)$$

$$-\frac{d^7P}{ds^7} = \frac{\pi^8}{x^8}\left(y^7 \begin{matrix}+6.1\\+3.179\end{matrix}\, y^5 \begin{matrix}+4.179\\+5.479\end{matrix}\, y^3 \begin{matrix}+2.479\\+7.61\end{matrix}\, y\right)$$

&c.

ex quarum ultima expreſſione ſimul lex conſtat, cujus ope ex differentiali cujusvis ordinis, differentiale ſequentis ordinis formari poteſt. Hincque iſtius ſeriei

$$\frac{1}{s^n} \pm \frac{1}{(1-s)^n} - \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \pm \frac{1}{(3-s)^n} - \text{\&c.}$$

ſumma pro quovis exponentis n valore aſſignabitur.

§. XXII.

Simili modo reperientur valores differentialium cujuscunque ordinis alterius quantitatis Q eritque

$$+Q = \frac{\pi}{x}\cdot y$$

$$-\frac{dQ}{ds} = \frac{\pi\pi}{xx}\cdot 1$$

$$+\frac{ddQ}{ds^2} = \frac{\pi^3}{x^3}\cdot 2y$$

— d

$$-\frac{d^3Q}{ds^3} = \frac{\pi^4}{x^4}(4yy+2)$$

$$+\frac{d^4Q}{ds^4} = \frac{\pi^5}{x^5}(8y^3+16y)$$

$$-\frac{d^5Q}{ds^5} = \frac{\pi^6}{x^6}(16y^4+88y^2+16)$$

$$+\frac{d^6Q}{ds^6} = \frac{\pi^7}{x^7}(32y^5+416y^3+272y)$$

$$-\frac{d^7Q}{ds^7} = \frac{\pi^8}{x^8}(64y^6+1824y^4+2880y^2+272)$$

$$+\frac{d^8Q}{ds^8} = \frac{\pi^9}{x^9}\left(2.64y^7 + \begin{matrix}4.1824\\+7.64\end{matrix}\,y^5 + \begin{matrix}6.2880\\+5.1824\end{matrix}\,y^3 + \begin{matrix}8.272\\+3.2880\end{matrix}\,y\right)$$

&c.

Lex progreſſionis hic pariter patet, cujus ope, quo usque libuerit, progredi licet: atque hinc exhiberi poterit ſumma omnis ſeriei poteſtatum, quæ in hac forma continetur:

$$\frac{1}{s^n} \mp \frac{1}{(1-s)^n} + \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \mp \frac{1}{(3-s)^n} + \&c.$$

In his autem ſeriebus non ſolum continentur omnes poteſtatum ſeries, quas præcedens methodus ſuppeditaverat, ſed inſuper innumerabiles aliæ. Quin etiam ipſa hæc methodus ad plura alia præclara eruenda idonea videtur.

Num. V.

NUM. V.

Ejusdem

De Integratione

Æquationum Differentialium altiorum graduum.

§. I.

QUanquam ad reſolvendas æquationes differentiales primi gradus plurimæ adhuc excogitatæ ſunt methodi, atque in hoc negotio ſummi Geometræ operam ac ſtudium collocaverunt; tamen parum etiam nunc ſubſidii attulerunt ad æquationes differentiales altiorum graduum tractandas, easque vel conſtruendas vel integrandas. Æquationes quidem differentiales ſecundi gradus ita reſolvi ſolent, ut per idoneam ſubſtitutionem ad æquationes primi gradus reducantur, quo facto earum reſolutio ad viam magis tritam & cognitam revocatur: atque in hoc negotio nonnulla ſubſidia ante complures annos excogitavi, quorum ope innumerabiles æquationes differentiales ſecundi gradus ad primum gradum deprimi, atque adeo ſive conſtrui ſive integrari poſſunt. At vero in æquationibus differentialibus tertii, altiorisve gradus, ſimilia artificia, quibus eæ ad gradum inferiorem traduci queant, parum ac plerumque nihil proſunt, cum hoc pacto ad æquationes differentiales ſecundi vel etiam altioris gradus tam complicatas perveniatur, ut ulterius

tractari omnino nequeant. Quamobrem in hoc negotio non parum utilitatis afferet methodus, quam hic ſum expoſiturus, cujus beneficio plurimæ æquationes differentiales altiorum graduum ſine prævia reductione ad gradus inferiores ſtatim integrari, atque æquationes integrales in terminis finitis exhiberi poſſunt.

§. II.

Sint y & x variabiles, quibus æquatio differentialis cujuscunque gradus contineatur, in qua differentiale dx aſſumtum ſit conſtans: atque habeat altera variabilis y cum ſuis differentialibus dy, ddy, d^3y, &c. in ſingulis terminis unicam dimenſionem, ita ut æquatio, cujuscunque demum ſit gradus, ſequentem induat formam:

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \&c.$$

in qua litteræ A, B, C, D, &c. ſignificent quantitates vel conſtantes, vel alteram variabilem x utcunque involventes. Manifeſtum autem eſt, hanc æquationem latiſſime patere, non ſolum enim ob coefficientes indeterminatos A, B, C, D, &c. quos ſimul functiones quascunque ipſius x aſſumimus, maxime eſt generalis, ſed etiam æquationes differentiales cujuscunque gradus in ſe complectitur. Hanc igitur æquationem, quibus caſibus integrationem admittat, in hac diſſertatione evolvam.

§. III.

Primum quidem perſpicuum eſt, æquationem integralem completam præter quantitates conſtantes in ipſa æquatione

tione differentiali contentas, tot novas conſtantes arbitrarias in ſe complecti oportere, quoti fuerit gradus æquatio differentialis propoſita. Quodſi enim ponamus, eam æquationem eſſe differentialem gradus n, ita ut ultimus illius terminus ſit $\frac{N\,d^n y}{dx^n}$; per unam integrationem ea reducetur ad gradum $n - 1$. per duas integrationes ſucceſſive inſtitutas ad gradum $n - 2$; per tres ad gradum $n - 3$; & ita porro. Ex quo intelligitur, demum poſt n integrationes ad æquationem integralem terminis finitis expreſſam perveniri Quoniam vero per unamquamque integrationem una conſtans arbitraria in integrale ingreditur, manifeſtum eſt, integrale completum n conſtantes arbitrarias complecti oportere.

§. IV.

Æquatio igitur integralis completa tot conſtantes arbitrarias in ſe complectitur, quot exponens n continebit unitates; hæcque æquatio integralis æque late patere cenſenda eſt, atque ipſa æquatio differentialis gradus n: ita ut nullus valor finitus pro y aſſumtus æquationi differentiali ſatisfacere queat, qui non contineatur in æquatione integrali completa. Quodſi autem in iſta æquatione integrali completa una pluresve illarum conſtantium arbitrariarum pro lubitu determinentur, tum habebitur quidem æquatio quæſito ſatisfaciens, at ea non amplius erit completa, ſed tantum æquatio integralis particularis, quæ non omnes poſſibiles valores ipſius y æquationi differentiali ſatisfacientes in ſe complectitur. Probe igitur diſcerni oportet æquationem integralem

completam a particulari; atque ſi æquationi differentiali perfecte ſatisfacere velimus, æquationem integralem completam inveniri oportet.

§. V.

Ad cognoscendum autem, utrum æquatio integralis exhibita ſit completa, nec ne, criterium ex allatis facile colligitur. Primum enim ea æquationi propoſitæ differentiali ſatisfacere debet, quod fit, dum facta ſubſtitutione æquatio identica reſultat; alioquin enim illa æquatio nequidem foret integralis. Præterea vero neceſſe eſt, ut æquatio integralis tot contineat quantitates conſtantes arbitrarias, quoti fuerit gradus æquatio differentialis propoſita. Si enim pauciores in ea inſint conſtantes, tum æquatio integralis data non erit completa, ſed tantum particularis. In enumeratione autem conſtantium arbitrariarum probe cavendum eſt, ne per numerum diverſarum litterarum fallamur, neque pro diverſis quantitatibus habeamus, quæ per ſe invicem determinantur.

§. VI.

Quo discrimen inter æquationes integrales completas & incompletas clarius intelligatur, juvabit rem exemplo illuſtraſſe. Sit igitur propoſita hæc æquatio differentialis $aady + yydx = (aa + xx)dx$; cui ſatisfacere patet hunc valorem $y = x$, quippe qui ſubſtitutus producit æquationem identicam. Eſt igitur $y = x$ æquatio integralis, at minime completa, cum ea neque conſtantem a, quæ in æquatione differentiali ineſt, neque præterea aliam conſtantem arbitra-

bitrariam contineat, quemadmodum æquatio differentialis primi gradus poſtulat. Vehementer igitur falleretur, qui hanc æquationem $y = x$ pro integrali completa hujus $aady + yydx = (aa + xx)dx$ venditare vellet: æquatio enim integralis completa eſt

$$y = x + \frac{aabe^{\frac{-xx}{aa}}}{aa + b\int e^{\frac{-xx}{aa}}dx}$$: quæ faciendo conſtantem arbitrariam $b = o$ utique reddit integralem particularem $y = x$.

§. VII.

Simili modo videmus huic æquationi differentio-differentiali $y = \frac{xdy}{dx} + \frac{axddy}{dx^2}$ ſatisfacere hanc æquationem finitam $y = x$; procul autem abeſt, quominus ſit integralis completa, omnemque vim æquationis differentio-differentialis exhauriat, quoniam æquatio integralis completa præter conſtantem a duas quantitates arbitrarias continere debet. Videmus vero etiam hanc æquationem $y = nx$ ſatisfacere, quæ autem, quia unicam conſtantem n continet, tantum modo eſt particularis. Æquatio autem integralis completa eſt

$$y = nx + bx\int\frac{e^{\frac{-x}{a}}dx}{xx},$$ quæ præter conſtantem a duas continet conſtantes arbitrarias b & n; uti natura rei poſtulat.

 §. VIII.

§. VIII.

Cum autem omnes æquationes integrales particulares in completa contineantur, patet ex pluribus integralibus particularibus completam conſtare; atque adeo ex integralibus particularibus integrale completum conflabitur. Sæpe numero quidem æque difficile eſt ex cognitis aliquot integralibus particularibus integrale completum vel ſaltem integrale latius patens, atque idem ex ipſa æquatione differentiali per integrationem colligere. At vero æquatio quam tractare ſuscepimus

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \&c.$$

ita eſt comparata, ut cognitis valoribus particularibus ipſius y duobus pluribusve, ex iis facile valor latius patens illos nempe valores in ſe complectens ipſius y formari queat. Hocque pacto ex ſufficienti numero valorum particularium pro y inventorum valor completus, ſeu æquatio integralis completa concinnari poterit.

§. IX.

Primo autem perſpicitur ſi p fuerit valor conveniens ipſius y, ita ut ſit $y = p$, tum etiam fore $y = \alpha p$; namque ſi valor p loco y ſubſtitutus reddit $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$ $+ \&c. = 0$, tum valor αp loco y ſubſtitutus eandem expreſſionem evaneſcentem efficiet: hocque modo una conſtans arbitraria α in æquationem integralem particularem

$y = p$

$y = p$ introduci poteſt. Sin autem præterea hæc æquatio $y = q$ ſatisfaciat propoſitæ, tum pari modo quoque ſatisfaciet $y = \beta q$: ex his autem duobus valoribus particularibus $y = \alpha p$ & $y = \beta q$, colligetur hic latius patens $y = \alpha p + \beta q$. Si enim expreſſio $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx} + \frac{Dd^3y}{dx^3} +$ &c. nihilo æqualis redditur, poſito tam αp quam βq loco y, manifeſtum eſt, eandem expreſſionem nihilo æqualem fieri debere, ſi loco y ponatur $\alpha p + \beta q$.

§. X.

Simili modo ſi p, q, r, s, &c. fuerint ejusmodi functionis ipſius x, ut ſingulæ ſeorſim loco y ſubſtitutæ expreſſionem $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} +$ &c. evanescentem efficiant, tum etiam hic valor $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s +$ &c. loco y ſubſtitutus eandem expreſſionem nihilo æqualem producet. Quare ſi p, q, r, s, &c. fuerint valores particulares ipſius y, qui ipſi ex æquatione propoſita conveniunt, tum ex iis colligitur iſte valor longe latius patens $y = \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s +$ &c. æquationi propoſitæ pariter ſatisfaciens. Hicque valor adeo erit completus, ſi tot affuerint conſtantes arbitrariæ α, β, γ, δ, &c. quoti fuerit gradus æquatio differentialis propoſita. Facilem igitur nacti ſumus modum, ex pluribus valoribus particularibus ipſius y, ejus valorem completum aſſignandi, qui omnes omnino valores ipſius y æquationi ſatisfacientes in ſe complectatur: ſicque

habebi-

habebitur æquatio integralis in terminis finitis completa.

§. XI.

Totum ergo negotium pro inveniendo integrali completo æquationis propoſitæ

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots\ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$$

huc reducitur, ut valores particulares inveſtigemus, qui pro y ſubſtituti æquationem identicam reddant. Tot autem ejusmodi valoribus particularibus erit opus, quoad iis præſcripto modo colligendis tot conſtantes arbitrariæ affuerint, quot exponens maximus n continet unitates. Quare ſi ſingulæ æquationes particulares unam ſecum gerant conſtantem arbitrariam, ejusmodi æquationes numero n requiruntur, ad æquationem integralem completam conſtituendam. Sin autem quædam harum æquationum particularium plures una conſtantes arbitrarias implicent, tum eo paucioribus opus erit æquationibus particularibus ad completam ex iis colligendam.

§. XII.

Denotent jam omnes litteræ A, B, C, D, &c. quantitates conſtantes, ita ut integrari debeat hæc æquatio differentialis gradus n

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots\ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n}.$$

Quoniam y cum ſuis differentialibus ubique unicam dimenſionem complet, ſecundum methodum meam in Tomo III.

Com-

Comment. Academiæ Petropol. traditam hæc æquatio differentialis uno gradu deprimetur, ſi ponamus $y = e^{\int p dx}$: unde ſingula differentialia ipſius y erunt

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int p dx} p$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = e^{\int p dx} \left(pp + \frac{dp}{dx}\right)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = e^{\int p dx} \left(p^3 + \frac{2p\,dp}{dx} + \frac{ddp}{dx^2}\right)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = e^{\int p dx} \left(p^4 + \frac{6pp\,dp}{dx} + \frac{4p\,ddp}{dx^2} + \frac{3dp^2}{dx^2} + \frac{d^3 p}{dx^3}\right)$$

&c.

qui valores ſi in propoſita ſubſtituantur, ea dividi poterit per $e^{\int p dx}$, atque remanebit æquatio differentialis gradus $n-1$.

§. XIII.

Hic autem primum patet, ſi capiatur p conſtans, ita ut ejus differentialia dp, ddp, $d^3 p$, &c. evaneſcant, tum ob A, B, C, D, &c. conſtantes, variabilem x prorſus ex æquatione eſſe exceſſuram; atque in hac hypotheſi orietur ſequens æquatio algebraica:

$$0 = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 \ldots\ldots + Np^n:$$

ex qua ſi valor aliquis pro p eruatur, ſimul habebitur æquatio integralis particularis $y = e^{px}$, æquationi differentiali propoſitæ ſatisfaciens; ſatisfaciet ergo etiam uti vidimus hæc

 æqua-

æquatio $y = \alpha e^{px}$, quoties p fuerit quantitas conſtans ac radix hujus æquationis algebraicæ $o = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \ldots + Np^n$.

§. XIV.

Perduximus ergo inventionem valorum particularium pro variabili y, ad reſolutionem æquationis algebraicæ n dimenſionum, pro qua ſumamus hanc

$o = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Nz^n$

hujusque æquationis ſingulæ radices ſeu diviſores dabunt totidem valores particulares ipſius y. Si enim fuerit $pz - q$ diviſor iſtius æquationis, ex quo oritur $z = \frac{q}{p}$, erit $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$; qui valor particularis unam continet conſtantem arbitrariam α. Cum autem illa æquatio algebraica n dimenſionum contineat n radices ſeu diviſores, hinc quoque orientur n valores particulares pro y; qui junctim ſumti dabunt valorem univerſalem pro y; hicque ſimul erit valor completus, eo quod n contineat conſtantes arbitrarias; quod eſt criterium æquationis integralis completæ.

§. XV.

Si ergo æquationis iſtius algebraicæ n dimenſionum omnes radices fuerint reales, tum prodibit valor completus pro y in terminis realibus expreſſus, eritque aggregatum n formularum exponentialium hujus ſpeciei $\alpha\, e^{qx:p}$: hocque

adeo

adeo caſu integrale completum per ſolam logarithmicam ſeu quadraturam hyperbolæ exprimi poterit. Quodſi autem aliquot radicum illius æquationis algebraicæ fuerint imaginariæ, tum in integrale completum ingredientur formulæ exponentiales imaginariæ; quas infra per quadraturam circuli conſtruere docebo. Præcipua difficultas in hoc verſatur, quando duæ pluresve radices æquationis ſint inter ſe æquales, tum enim ob plures formulas exponentiales æquales, numerus conſtantium arbitrariarum diminuitur; atque obhanc cauſam integrale inventum non amplius erit completum.

§. XVI.

Utrique incommodo medelam afferemus, ſi nexum inter æquationem differentialem propoſitam

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots\ldots + \frac{Nd^n}{dx^n}$$

atque inter æquationem algebraicam formatam

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Nz^n$$

attentius contemplemur. Quemadmodum enim ex hac illa oritur, ſi loco z^0 ponatur y, loco z vero $\frac{dy}{dx}$, & generaliter loco z^k ſcribatur $\frac{d^ky}{dx^k}$: ita ſimilimodo ex factoribus ſingulis æquationis algebraicæ formabuntur æquationes differentiales, quæ neceſſario in æquatione differentiali propoſita continebuntur, atque ex quibus proinde valores particulares pro y reperientur. Sic ſi $pz - q$ vel $q - pz$ fuerit diviſor æquationis algebraicæ, ex hoc per legem nexus

xus oritur hæc æquatio differentialis $qy - \frac{pdy}{dx} = 0$ quæ integrata dat $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$, quæ eſt ea ipſa, quam ex eodem factore $pz - q$ elicuimus.

§. XVII.

Hinc intelligitur ſi habeatur diviſor quicunque æquationis illius algebraicæ puta, $p + qz + rzz$ tum æquationem ex hoc diviſore oriundam $py + \frac{qdy}{dx} + \frac{rddy}{dx^2} = 0$ dare valorem pro y, qui etiam ſatisfacit æquationi differentiali propoſitæ. Ex hoc ergo illam difficultatem tollere poterimus, quæ locum habet, ſi æquatio algebraica habeat duos pluresve factores æquales. Sit igitur $(p - qz)^2$ diviſor æquationis algebraicæ, ex hocque evoluto reſultabit hæc æquatio differentio-differentialis $ppy - \frac{2pqdy}{dx} + \frac{qqddy}{dx^2} = 0$. Ponamus $y = e^{\frac{px}{q}} u$, facta que ſubſtitutione habebimus $ddu = 0$, hincque $u = \alpha + \beta x$. Quare ex factore quadrato $(p - qz)^2$ oritur ſequens valor $y = e^{\frac{px}{q}}(\alpha + \beta x)$, qui duas conſtantes arbitrarias complectitur.

§. XVIII.

Si æquatio algebraica habeat diviſorem cubicum $(p-qz)^3$, tum in æquatione differentiali propoſita continebitur hacc

$p^3 y -$

$p^3 y - \frac{3ppq\,dy}{dx} + \frac{3pqq\,ddy}{dx^2} - \frac{q^3 d^3 y}{dx^3} = 0$ quæ poſito $y = e^{\frac{px}{q}} u$, transmutabitur in hanc: $d^3 u = 0$; unde oritur $u = \alpha + \beta x + \gamma xx$, ex quo æquationi propoſitæ ſatisfaciet iſte valor particularis $y = e^{\frac{px}{q}} (\alpha + \beta x + \gamma xx)$. Simili modo ſi æquatio algebraica $0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$ habeat diviſorem biquadratum $(p - qz)^4$, tum ex eo naſcetur iſta æquatio particularis ſatisfaciens $y = e^{\frac{px}{q}} (\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3)$. Atque generaliter ſi diviſor ſit $(p - qz)^k$, erit valor inde ortus $y = e^{\frac{px}{q}} (\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \ldots\ldots\ldots kx^{k-1})$. ita ut is k conſtantes imaginarias involvat.

§. XIX.

Si cui dubium ſuperſit, an hoc modo ex diviſoribus compoſitis, in quibus z plures una habet dimenſiones, æquationis $0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Nz^n$ recte deducantur valores pro y, qui æquationi propoſitæ: $0 = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \ldots\ldots + \frac{N\,d^n y}{dx^n}$ hoc dubium ex natura rei facile tolli poterit. Sit diviſor utcunque compoſitus $p + qz + rzz + sz^3 +$ &c. ex eoque formetur æquatio $0 = py + \frac{q\,dy}{dx} + \frac{r\,ddy}{dx^2} + \frac{s\,d^3y}{dx^3}$ + &c.

$+$ &c. atque patebit valorem completum ipſius y pro hac æquatione prodire, ſi omnes valores ipſius y quos diviſores ſimplices æquationis $0 = p + qz + rzz + sz^3 +$ &c. ſuppeditant, in unam ſummam colligantur; at diviſores ſimplices hujus æquationis ſimul ſunt diviſores ſimplices illius $0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$; & hanc obrem valor ipſius y ex illa factore compoſito ortus, ſimul eſt valor conveniens æquationis propoſitæ differentialis

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots\ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n};$$

§. XX.

Inventis autem valoribus ipſius y, qui ex aliquot diviſoribus ſimplicibus inter ſe æqualibus æquationis $0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Nz^n$ oriuntur, altera difficultas ſolvenda reſtat, ſi hæc æquatio habeat radices imaginarias. Conſtat autem, ſi quæpiam æquatio habeat radices imaginarias, earum numerum ſemper eſſe parem; atque ego alibi oſtendi has radices imaginarias perpetuo binis conjungendis in ejusmodi paria diſpesci poſſe, quarum tam ſumma quam productum fiat quantitas realis. Hinc loco diviſorum imaginariorum prodibunt diviſores compoſiti duarum dimenſionum hujus formæ $p - qz + rzz$ reales, qui autem diviſores ſimplices habeant imaginarios. Erit ergo in tali diviſore compoſito $qq < 4pr$; unde $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$

$< 1.$

∢ I. Poſito ergo ſinu toto $= 1$ erit $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ coſinus cujuspiam anguli realis, qui ſit $= \Phi$; fietque $q = 2\sqrt{pr}.\cos A.\Phi$, ex quo generalis forma diviſorum compoſitorum, qui diviſores imaginarios in ſe contineant, erit hujusmodi $p - 2z\sqrt{pr}.\cos A\Phi + rzz$.

§. XXI.

Sit igitur æquationis $o = A + Bz + Cz^2 + \&c.$ ejusmodi diviſor $p - 2z\sqrt{pr}.\cos A\Phi + rzz$; ex quo inveniri debeat conveniens valor ipſius y. At ex hoc diviſore naſcitur iſta æquatio differentio - differentialis

$o = py - \frac{2dy\sqrt{pr}}{dx}\cos A.\Phi + \frac{rddy}{dx}$ ad quam integrandam ponatur $y = e^{fx\cos A.\Phi}u$ poſito brevitatis gratia $f = \sqrt{\frac{p}{r}}$ fietque $ffudx^2(\sin A\Phi)^2 + ddu = o$. Multiplicetur per $2du$ & integretur erit $ffuudx^2(\sin A\Phi)^2 + du^2 = \alpha^2 ffdx^2(\sin A\Phi)^2$, unde $fdx\sin A\Phi = \frac{du}{\sqrt{(\alpha^2 - u^2)}}$; quæ integrata dat $fx\sin A\Phi + \beta = A\sin.\frac{u}{\alpha}$. Ex qua æquatione fit $u = \alpha\sin A.(fx\sin A.\Phi + \beta)$. Conſequenter habetur $y = \alpha e^{fx\cos A\Phi}\sin A(fx\sin A\Phi + \beta)$ qui erit valor conveniens ipſius y pro æquatione propoſita.

§. XXII.

§. XXII.

Eadem vel æquivalens expreſſio pro y colligitur ex factoribus ſimplicibus etſi imaginariis æquationis $0 = p - 2z\sqrt{pr}.\cos A\Phi + rzz$: quæ poſito $f = \sqrt{\frac{p}{r}}$ abit in hanc $0 = ff - 2fz\cos A\Phi + zz$, cujus radices ſunt $z = f\cos A\Phi \pm f\sqrt{-1}.\sin A\Phi$. Hinc pro y reſultant valores $e^{fx\cos A\Phi + fx\sqrt{-1}.\sin A\Phi}$ & $e^{fx\cos A\Phi - fx\sqrt{-1}.\sin A\Phi}$ quibus conjunctis fit $y = e^{fx\cos A\Phi}(\eta e^{+fx\sqrt{-1}.\sin A\Phi} + \theta e^{-fx\sqrt{-1}.\sin A\Phi})$

His autem exponentialibus in ſeries converſis prodibit

$$y = e^{fx\cos A\Phi}\begin{cases}(\eta+\theta)\left(1 - \frac{ffxx(\sin A\Phi)^2}{1.\ 2} + \frac{f^4x^4\ (\sin A\Phi)^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \&c.\right)\\ (\eta-\theta)\sqrt{-1}\left(fx\sin A\Phi - \frac{f^3x^3\ (\sin A\Phi)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)\end{cases}$$

Poſito ergo $\eta + \theta = \alpha$ & $(\eta - \theta)\sqrt{-1} = \beta$, orietur ſummatis his ſeriebus infinitis $y = e^{fx\cos A\Phi}(\alpha\cos A.fx\sin A\Phi + \beta\sin A.fx\sin A\Phi)$: quæ expreſſio ad priorem facile reducitur.

§. XXIII.

Hinc adipiſcimur modum inveniendi valorem ipſius y, ſi duo pluresve hujusmodi diviſores compoſiti fuerint inter ſe æquales. Sit enim $(ff - 2fz\cos A\Phi + zz)^2$ diviſor æquationis algebraicæ: quoniam is reducitur ad $(z - f\cos A\Phi - f\sqrt{-1}.\sin A\Phi)^2\ (z - f\cos A\Phi + f\sqrt{-1}.\sin A\Phi)^2$, erit

erit per præcedentia valor ipſius y hinc oriundus: $y =$
$$e^{fx\cos A\Phi + fx\sqrt{-1}.\sin A\Phi}(\eta+\theta x) + e^{fx\cos A\Phi - fx\sqrt{-1}\sin A\Phi}(\iota+\varkappa x)$$

Cum autem ſit $e^{+fx\sqrt{-1}.\sin A\Phi}\eta + e^{-fx\sqrt{-1}.\sin A\Phi}\iota = \alpha\cos A.fx\sin A\Phi + \beta\sin A.fx\sin A\Phi$, hinc colligitur fore $y =$
$$e^{fx\cos A\Phi}\left((\alpha+\beta x)\cos A.fx\sin A\Phi + (\gamma+\delta x)\sin A.fx\sin A\Phi\right)$$

§. XXIV.

Quod ſi autem cubus aliave poteſtas ipſius $ff - 2fz\cos A\Phi + zz$ fuerit diviſor æquationis algebraicæ $0 = A + Bz + Czz + Dz^3 + \ldots\ldots + Nz^n$, tum ex poteſtatibus iisdem factorum ſimplicium imaginariorum valores ipſius y eruantur ſecundum §. 18. & in unam ſummam conjiciantur. Quo facto quantitates exponentiales imaginariæ in ſinus & coſinus arcuum circularium converti poſſunt ope hujus lemmatis
$$e^{+fx\sqrt{-1}.\sin A\Phi}\eta x^k + e^{-fx\sqrt{-1}.\sin A\Phi}\theta x^k = \alpha x^k\cos A.fx\sin A\Phi + \beta x^k\sin A.fx\sin A\Phi.$$
Sic ſi $(ff - 2fz\cos A\Phi + zz)^4$ fuerit diviſor æquationis algebraicæ, tum ex eo ſequens naſcetur æquatio integralis $y = e^{fx\cos A\Phi}\left((\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)\cos A.fx\sin A\Phi + (\varepsilon + \zeta x + \eta x^2 + \theta x^3)\sin A.fx\sin A\Phi\right)$.

§. XXV.

Expreſſiones iſtæ pluribus modis immutari poſſunt, pro-

ut conſtantes aliis atque aliis modis exprimantur. Commodiſſima autem videtur hæc transmutatio, qua valores ipſius y ad formam §. 21. inventam reducuntur. Ita hæc forma $\mu x^k \operatorname{cos} A. fx \operatorname{sin} A \phi + \nu x^k \operatorname{sin} A. fx \operatorname{sin} A \phi$ ſi ponatur $\mu = \lambda \operatorname{sin} A. p$, & $\nu = \lambda \operatorname{cos} A. p$, transmutabitur in hanc $\lambda x^k \operatorname{sin} A (fx \operatorname{sin} A \phi + p)$. Qamobrem ex factore indefiniti exponentis $(ff - 2fz \operatorname{cos} A. \phi + zz)^k$ formabitur ſequens valor ipſius y;

$$y = e^{fx \operatorname{cos} A \phi} (\alpha \operatorname{sin} A (fx \operatorname{sin} A \phi + \mathfrak{A}) + \beta x \operatorname{sin} A (fx \operatorname{sin} A \phi + \mathfrak{B}) + \gamma x^2 \operatorname{sin} A (fx \operatorname{sin} A \phi + \mathfrak{C}) + \ldots\ldots + \varkappa x^{k-1} \operatorname{sin} A (fx \operatorname{sin} A \phi + \mathfrak{K}))$$

Hocque pacto ex omnibus diviſoribus, utcunque fuerint comparati, valores reales pro variabili y inveniuntur.

§. XXVI.

Quod jam ad conſtantes arbitrarias, quæ in valores ipſius y hoc modo inveniendos ingrediuntur, attinet; patet primo, ex factoribus ſimplicibus formæ $f - z$, oriri valores ipſius y unicam conſtantem arbitrariam continentes: deinde valor ipſius y, qui oritur ex factore $(f - z)^k$, continet k conſtantes arbitrarias. Porro ex factore compoſito $ff - 2fz \operatorname{cos} A \phi + zz$ prodit valor ipſius y duas conſtantes arbitrarias complectens: atque ex hujusmodi factorum poteſtate quacunque $(ff - 2fz \operatorname{cos} A. \phi + zz)^k$ formatur valor ipſius y, in quo $2k$ conſtantes arbitrariæ inſunt; ita ut numerus conſtantium arbitrariarum æqualis ſit numero dimenſionum ipſius z, quas hæc variabilis in diviſore obtinet, ex quo valor ipſius y eſt erutus.

§. XXVII.

§. XXVII.

Quodſi ergo æquatio algebraica, quam ex æquatione differentiali propoſita formavimus

$$o = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots + Nz^n$$

in factores ſuos ſive ſimplices ſive compoſitos reales, ſive tales, qui ſint poteſtates ſimplicium compoſitorumve, reſolvatur, atque modo deſcripto ex ſingulis valores convenientes ipſius y formentur, tum hi omnes ipſius y valores junctim conſiderati tot continebunt conſtantes arbitrarias, quot in exponente n inſunt unitates. Omnes igitur iſti valores in unam ſummam collecti non ſolum valorem præbebunt pro y, qui æquationi propoſitæ

$$o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$$

ſatisfaciat, verum etiam iſte ipſius y erit valor completus, qui omnes poſſibiles valores huic æquationi convenientes in ſe complectetur. Hoc ergo pacto æquatio iſta differentialis perfecte integratur in terminis finitis, neque integrale unquam alias præter hyperbolæ atque circuli quadraturas requirit.

Problema. I.

§. XXVIII.

Si propoſita fuerit æquatio differentialis gradus n hujus formæ

$$o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots\ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$$

in qua elementum dx poſitum eſt conſtans, ac litteræ A, B,

 C, D,

C, D . . . . . N denotant coefficientes conſtantes quoscunque: invenire hujus æquationis integrale in terminis finitis realibus.

Solutio.

Scribatur 1 loco y; z loco $\frac{dy}{dx}$; z^2 loco $\frac{ddy}{dx^2}$; & generaliter z^k loco $\frac{d^k y}{dx^k}$; hincque formetur ſequens æquatio algebraica n dimenſionum.

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Nz^n$$

Hujus æquationis porro quærantur omnes diviſores ſimplices reales, quos quidem involvit; &, ſi habeat diviſores imaginarios, eorum loco capiantur diviſores compoſiti reales, in quibus z habeat duas dimenſiones, quoniam ſemper bini factores imaginarii unum factorem compoſitum realem conſtituunt. Ex ſingulis diviſoribus deinceps formentur ſequenti modo valores particulares pro y. Ex factore ſcilicet quolibet ſimplici, qui alios non habet ſui æquales, hujus formæ $f - z$, oritur iſtc valor $y = \alpha e^{fx}$. Ex duobus autem pluribusve factoribus æqualibus conjunctim ſumtis valores ipſius y determinari debent. Nempe ex factore $(f-z)^2$ oritur $y = (\alpha + \beta x) e^{fx}$: ex factore $(f - z)^3$ oritur $y = (\alpha + \beta x + \gamma xx) e^{fx}$; atque generaliter ex factore $(f-z)^k$ deducitur $y = e^{fx} (\alpha + \beta x + \gamma xx + \ldots\ldots + \kappa x^{k-1})$.

Quod

Quod ad factores compoſitos attinet, ſi illa æquatio algebraica habeat factorem $ff - 2fz\cos A.\Phi + zz$, qui ſui ſimilem inter reliquos non habeat, erit valor ex eo oriundus $y = e^{fx\cos A\Phi}\alpha\sin A(fx\sin A\Phi + \mathfrak{A})$. Si æquatio algebraica duos hujusmodi factores habeat æquales, ita ut ſit diviſibilis per $(ff - 2fz\cos A\Phi + zz)^2$ tum ex diviſore quadrato oritur ſequens valor $y = \alpha e^{fx\cos A.\Phi}\sin A(fx\sin A\Phi + \mathfrak{A}) + \beta x e^{fx\cos A\Phi}\sin A.(fx\sin A\Phi + \mathfrak{B})$. Sin autem hujus factoris poteſtas quæcunque puta $(ff - 2fz\cos A\Phi + zz)^k$ fuerit diviſor æquationis algebraicæ, tum ex eo reſultat ſequens valor $y =$

$$\alpha e^{fx\cos A\Phi}\sin A(fx\sin A\Phi + \mathfrak{A}) + \beta x e^{fx\cos A\Phi}\sin A(fx\sin A\Phi + \mathfrak{B}) + \gamma x^2 e^{fx\cos A\Phi}\sin A(fx\sin A\Phi + \mathfrak{C}) + \delta x^3 e^{fx\cos A\Phi}\sin A(fx\sin A\Phi + \mathfrak{D}) + \dots\dots\dots + \kappa x^{k-1} e^{fx\cos A\Phi}\sin A(fx\sin A\Phi + \mathfrak{K})$$

Inventis autem hoc modo ex ſingulis diviſoribus æquationis algebraicæ convenientibus valoribus ipſius y, nihil aliud ſupereſt, niſi ut omnes iſti valores in unam ſummam collocentur, hocque modo prodibit valor ipſius y completus; atque is ipſe, qui proditurus eſſet, ſi æquatio differentialis gradus n propoſita n vicibus integraretur. Q. E. J.

Exemplum. I.

§ XXIX. *Hujus æquationis differentialis ſecundi gradus* $o = ay + \frac{bdy}{dx} + \frac{cddy}{dx^2}$ *integrale invenire.*

Poſitis uti præcepimus 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$, & zz pro $\frac{ddy}{dx^2}$, oritur hæc æquatio $o = a + bz + czz$; quæ vel ambas radices habebit reales, vel imaginarias: prius evenit, ſi $bb > 4ac$, poſterius ſi $bb < 4ac$. Sit igitur primo $bb > 4ac$, ac duæ radices erunt $z = \frac{-b \pm \sqrt{(bb-4ac)}}{2c}$ hæque caſu erit integrale quæſitum.

$$y = \alpha e^{\frac{-bx + x\sqrt{(bb-4ac)}}{2c}} + \beta e^{\frac{-bx - x\sqrt{(bb-4ac)}}{2c}}$$

Caſus hic ſeorſim eſt perpendendus, quo $bb = 4ac$, tum enim erit $a + 2z\sqrt{ac} + czz$ quadratum nempe $(\sqrt{a} + z\sqrt{c})^2$, quod comparatum cum forma $(f-z)^2$ dat $f = -\sqrt{\frac{a}{c}}$, ex quo integrale erit $y = (\alpha + \beta x)e^{-x\sqrt{\frac{a}{c}}}$, quod eſt integrale æquationis $o = ay + \frac{2dy\sqrt{ac}}{dx} + \frac{cddy}{dx^2}$.

Sit jam $bb < 4ac$, atque æquatio $o = a + bz + czz$ non habebit radices reales, comparata ergo cum forma $ff - 2fz\,\mathrm{coſ}\,A\Phi + zz$ dat $\frac{b}{c} = -2f\,\mathrm{coſ}\,A\Phi$, & $\frac{a}{c} = ff$; unde

de erit $f = \sqrt{\frac{a}{c}}$ & coſ A $\Phi = \frac{-b}{2\sqrt{ac}}$ hincque ſin A $\Phi =$

$\frac{\sqrt{(4ac-bb)}}{2\sqrt{ac}}$, ex quo oritur integrale $y = \alpha\, e^{\frac{-bx}{2c}}$ ſin A $\left(\frac{x\sqrt{(4ac-bb)}}{2c} + \mathfrak{A}\right)$.

Exemplum. 2.

§. XXX. *Hujus æquationis differentialis tertii gradus* $0 = y - \frac{3a^2 ddy}{dx^2} + \frac{2a^3 d^3 y}{dx^3}$ *integrale invenire.*

Ex hac æquatione ergo oritur iſta algebraica $0 = 1 - 3a^2 zz + 2a^3 z^3$, quæ reſolvitur in hos factores $(1+2az)(1-az)^2$. Prior factor $1+2az$ cum forma $f-z$ comparatus dat $f = \frac{-1}{2a}$ unde oritur $y = \alpha\, e^{\frac{-x}{2a}}$; Poſterior factor $(1-az)^2$ comparari debet cum cum $(f-z)^2$, ex quo fit $f = \frac{1}{a}$ hincque naſcitur $y = (\beta + \gamma x)\, e^{\frac{x}{a}}$. Æquationis ergo propoſitæ integrale cõpletum erit

$$y = \alpha\, e^{\frac{-x}{2a}} + (\beta + \gamma x)\, e^{\frac{x}{a}}.$$

Exemplum. 3.

§. XXXI. *Hujus æquationis differentialis tertii gradus* $0 = y - \frac{a^3 d^3 y}{dx^3}$ *integrale invenire.*

Æquatio

Æquatio algebraica ex hac æquatione orta erit $0 = 1 - a^3 z^3$, quæ reſolvitur in hos factores: $(1-az)(1+az+a^2zz)$ ita ut ejus diviſores ſint hi $\frac{1}{a} - z$ & $\frac{1}{aa} + \frac{z}{a} + zz$ quorum iſte in ſimplices reales reſolvi nequit. Ille igitur diviſor $\frac{1}{a} - z$ dat pro integrali $y = \alpha\, e^{\frac{x}{a}}$; alter vero diviſor $\frac{1}{aa} + \frac{z}{a} + zz$ cum forma $ff - 2fz \operatorname{coſ} A\Phi + zz$ comparatus dat $f = \frac{1}{a}$ & $\frac{-2 \operatorname{coſ} A\Phi}{a} = \frac{1}{a}$, ita ut fiat $\operatorname{coſ} A\Phi = \frac{-1}{2}$ & $\operatorname{ſin} A\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ hinc ex iſto diviſore reſultat $y = \beta\, e^{\frac{-x}{2a}} \operatorname{ſin} A \left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + \mathfrak{A}\right)$. Æquationis ergo propoſitæ integrale completum erit

$$y = \alpha\, e^{\frac{x}{a}} + \beta\, e^{\frac{-x}{2a}} \operatorname{ſin} A \left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + \mathfrak{A}\right).$$

Exemplum. 4.

§. XXXII. *Hujus æquationis differentialis quarti gradus* $0 = y - \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}$ *integrale invenire.*

Ex hac æquatione formabitur iſta æquatio algebraica $0 = 1 - a^4 z^4$, quæ duos habet diviſores ſimplices reales $\frac{1}{a} - z$ & $\frac{1}{a} + z$, reliqui duo imaginarii continentur in

hoc

hoc compoſito $\frac{1}{aa} + zz$. Bini diviſores ſimplices pro integrali dant $y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{\frac{-x}{a}}$. Diviſor autem $\frac{1}{aa} + zz$ cum forma $ff - 2fz \operatorname{coſ} A\Phi + zz$ comparatus dat $f = \frac{1}{a}$, & $\operatorname{coſ} A\Phi = 0$, hincque $\operatorname{ſin} A\Phi = 1$: Terminus ergo exponentialis $e^{fx \operatorname{coſ} A\Phi}$ ob exponentem $= 0$ abit in unitatem, eritque $y = \gamma \operatorname{ſin} A \left(\frac{x}{a} + \mathfrak{A}\right)$. Integrale ergo completum erit:

$$y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{\frac{-x}{a}} + \gamma \operatorname{ſin} A\left(\frac{x}{a} + \mathfrak{A}\right)$$

Exemplum. 5.

§. XXXIII. *Hujus æquationis differentialis quarti gradus* $0 = y + \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}$ *integrale invenire.*

Reſolvi ergo oportebit iſtam æquationem algebraicam $0 = 1 + a^4 z^4$, quæ cum nullum habeat diviſorem ſimplicem realem, reſolvitur in hos binos factores compoſitos reales $1 + az\sqrt{2} + aazz$ & $1 - az\sqrt{2} + aazz$, qui diviſi per aa, ut cum forma $ff - 2fz \operatorname{coſ} A\Phi + zz$ comparari queant, dabunt $\frac{1}{aa} + \frac{z\sqrt{2}}{a} + zz$ & $\frac{1}{aa} - \frac{z\sqrt{2}}{a} + zz$

 pro

pro utraque fit $f = \frac{1}{a}$; pro illa autem, f coſ A Φ $=$ $\frac{-1}{a\sqrt{2}}$, at pro hac f coſ A $\Phi = \frac{1}{a\sqrt{2}}$; hincque iterum pro utraque f ſin A $\Phi = \frac{1}{a\sqrt{2}}$. Ex quibus oritur integrale completum æquationis propoſitæ

$$y = \alpha\, e^{\frac{-x}{a\sqrt{2}}} \text{ ſin A} \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + \mathfrak{A}\right) + \beta e^{\frac{x}{a\sqrt{2}}} \text{ ſin A} \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + \mathfrak{B}\right)$$

Exemplum. 6.

§. XXXIV. *Hujus æquationis differentialis ſeptimi gradus*

$$0 = y + \frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^7y}{dx^7}$$

integrale completum invenire.

Naſcitur hinc iſta æquatio algebraica 7^{mi} ordinis

$$0 = 1 + zz + z^3 + z^4 + z^5 + z^7$$

quæ reſolvitur in ſequentes factores reales tam ſimplices quam compoſitos: $(1+z)$ $(1+z+zz)$ $(1-z+zz)^2$. Horum primus cum forma $f - z$ comparatus dat $f = -1$, hincque oritur $y = \alpha e^{-x}$. Factor autem alter $1+z+zz$ comparatus cum $ff - 2fz$ coſ A $\Phi + zz$ dat $f = 1$ & coſ A $\Phi =$ $-\frac{1}{2}$, unde ſin A $\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, & integrale hinc natum $y =$ $\beta\, e^{\frac{-x}{2}}$ ſin A $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathfrak{A}\right)$. Tertius factor $(1-z+zz)^2$

compa-

comparari debet cum forma $(ff - 2fz\cos A\Phi + zz)^2$, unde fit $f = 1$, $\cos A\Phi = \frac{1}{2}$ & $\sin A\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ex eo igitur prodit integrale $y = \gamma e^{\frac{x}{2}} \sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathfrak{B}\right) + \delta x e^{\frac{x}{2}} \sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathfrak{C}\right)$. Quamobrem æquationis differentialis propoſitæ integrale completum erit

$$y = \alpha e^{-x} + \beta e^{\frac{-x}{2}} \sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathfrak{A}\right) + \gamma e^{\frac{x}{2}} \sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathfrak{B}\right) + \delta x e^{\frac{x}{2}} \sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathfrak{C}\right)$$

in quo utique ſeptem conſtantes arbitrariæ continentur.

Exemplum. 7.

§. XXXV. *Hujus æquationis differentialis octavi gradus*

$$0 = \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{3d^4y}{dx^4} + \frac{4d^5y}{dx^5} - \frac{4d^6y}{dx^6} + \frac{3d^7y}{dx^7} - \frac{d^8y}{dx^8}$$

integrale completum invenire.

Æquatio algebraica octavi gradus, quam reſolvi oportet, erit $0 = z^3 - 3z^4 + 4z^5 - 4z^6 + 3z^7 - z^8$: quam primum diviſibilem eſſe conſtat per z^3: qui diviſor cum forma $(f - z)^3$ comparatus dat $f = 0$, hincque pro integrali invenitur $y = \alpha + \beta x + \gamma xx$. Diviſore hoc in computum ducto ſupereſt reſolvenda hæc æquatio $0 = 1$

 $-3z$

$-3z+4zz-4z^3+3z^4-z^5$, quæ per $1+zz$ diviſibilis deprehenditur, quo cum forma $ff-2fz\cos A\Phi+zz$ comparato fit $f=1$ & $\cos A\Phi=0$ unde $\sin A\Phi=1$; ideoque reſultat $y=\delta\sin A\,(x+\mathfrak{A})$. Diviſione porro per $1+zz$ inſtituta remanet æquatio $1-3z+3zz-z^3=0=(1-z)^3$; in forma ergo $(f-z)^3$ fit $f=1$, atque integrale hinc oriundum eſt $y=(\varepsilon+\zeta x+\eta xx)e^x$. Conſequenter completum integrale æquationis propoſitæ eſt $y=\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta\sin A\,(x+\mathfrak{A})+(\varepsilon+\zeta x+\eta xx)e^x$.

Exemplum. 8.

§. XXXVI. *Hujus æquationis differentialis indefiniti gradus* $0=\frac{d^ny}{dx^n}$ *integrale invenire.*

Hinc reſultat iſta æquatio algebraica $z^n=0$, cujus cum omnes radices ſint æquales, ea comparari debet cum factore $(f-z)^k$, fietque $k=n$ & $f=0$ ex quo ſtatim prodit integrale quæſitum

$$y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots\ldots+\nu x^{n-1}$$

Hoc vero idem integrale facile invenitur integrationem n vicibus ſucceſſive inſtituendo. Prima enim integratione oritur $\alpha=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; multiplicetur per dx & integretur ſecundo erit $\alpha x+\beta=\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$. Quæ per dx multiplicata &

tertio

tertio integrata dabit $\frac{\alpha x x}{2} + \beta x + \gamma = \frac{d^{n-3} y}{d x^{n-3}}$. Atque ita porro, ſi integratio n vicibus repetatur, prodibit mutatis conſtantium expreſſionibus id ipſum integrale, quod per noſtram regulam invenimus.

§. XXXVII.

Hujus methodi beneficio poſſunt etiam plurimæ aliæ æquationes differentialis gradus indefiniti integrari, quæ quidem ad æquationes algebraicas deducunt, quarum factores reales ſive ſimplices ſive compoſiti actu exhiberi poſſunt. Cum autem hujus loci non ſit modum tradere, diviſores hujusmodi æquationum indefiniti dimenſionum numeri inveſtigandi, hic ejusmodi æquationes differentiales inſuper tractabimus, quæ ad æquationes algebraicas perducunt, quarum factores jam aliunde ſunt cogniti. Hujusmodi æquationes autem ſunt $f^n \pm z^n = 0$, & $f^{2n} \pm 2 p f^n z^n \pm z^{2n} = 0$; harum enim expreſſionum factores reales tam ſimplices quam compoſiti ſeu trinomiales omnes exhibiti ſunt a Viris de Analyſi meritiſſimis Cotesio & Moivræo, quos proinde tanquam cognitos in ſolutione ſequentium problematum asſumemus.

Problema. II.

§. XXVVIII.

Si propoſita fuerit iſta æquatio differentialis gradus n;

$0 = y - \frac{d^n y}{dx^n}$, in qua elementum dx ponitur conſtans, ejus integrale completum invenire.

Solutio.

Poſito uti præſcripſimus 1 loco y & z^n loco $\frac{d^n y}{dx^n}$ habebitur iſta æquatio algebraica $0 = 1 - z^n$, cujus æquationis diviſor ſimplex perpetuo $1 - z$, &, ſi n fuerit numerus par, diviſor ſimplex quoque eſt $1 + z$. Reliqui diviſores ſimplices omnes ſunt imaginarii, iique continentur in hac forma generali $1 - 2z \operatorname{cof} A. \frac{2k\pi}{n} + zz$; (ubi π denotat ſemicircumferentiam circuli cujus radius $= 1$) qui cum diviſore trinomiali generali $ff - 2fz \operatorname{cof} A\Phi + zz$ comparatus dat $f = 1$ & $\Phi = \frac{2k\pi}{n}$, ita ut hic diviſor det valorem integralem $y = \alpha\, e^{x \operatorname{cof} A \frac{2k\pi}{n}} \operatorname{ſin} A \left(x \operatorname{ſin} A \frac{2k\pi}{n} + \mathfrak{A}\right)$

Quodſi jam loco $2k$ ſucceſſive omnes numeri pares exponentem n non excedentes ſubſtituantur, prodibunt omnes poſſibiles valores, qui pro y ſubſtituti ſatisfaciunt. Continetur vero etiam in hac generali forma valor ipſius y, qui oritur ex factore ſimplici $1 - z$ qui eſt $y = \alpha\, e^{x}$; poſito enim $k = 0$, fit $\operatorname{cof} A. \frac{2k\pi}{n} = 1$. & $\operatorname{ſin} A. \frac{2k\pi}{n} = 0$, hincque y

=

$= \alpha e^{x}$, ob ſin A. $\mathfrak{A}$ conſtantem in α complexum. Simili modo, ſi n ſit numerus par, valor ipſius y ex factore $1 + z$ oriundus, qui eſt $y = \alpha e^{-x}$, ex factore generali reſultat facto $2k = n$, ſit enim tum coſ A. $\frac{2k\pi}{n} = -1$ & ſin A. $\frac{2k\pi}{n} = 0$, ita ut valor ex factore generali oriundus $y = \alpha e^{-x}$. Integrale ergo completum obtinebitur, ſi in forma generali $y = \alpha e^{x \cos A. \frac{2k\pi}{n}} \sin A (x \sin A. \frac{2k\pi}{n} + \mathfrak{A})$ ſucceſſive loco $2k$ omnes numeri pares a o usque ad n ſubſtituantur, hique valores in unam ſummam conjiciantur: Prodibit ergo integrale quæſitum & completum

$$y = \alpha e^{x} + \beta e^{x \cos A \frac{2\pi}{n}} \sin A (x \sin A. \frac{2\pi}{n} + \mathfrak{B})$$
$$+ \gamma e^{x \cos A. \frac{4\pi}{n}} \sin A (x \sin A \frac{4\pi}{n} + \mathfrak{C})$$
$$+ \delta e^{x \cos A. \frac{6\pi}{n}} \sin A (x \sin A. \frac{6\pi}{n} + \mathfrak{D})$$
$$+ \varepsilon e^{x \cos A. \frac{8\pi}{n}} \sin A (x \sin A. \frac{8\pi}{n} + \mathfrak{E}) + \&c.$$

quæ membra eousque debent continuari, quoad n conſtantes arbitrariæ habeantur, vel quod eodem redit, quoad coefficiens ipſius π major unitate evadat. Fiet autem, ſi n ſit nume-

numerus impar ultimum membrum $= \nu\, e^{x \cos A. \frac{(n-1)\pi}{n}}$ ſin A $(x$ ſin A. $\frac{(n-1)\pi}{n} + \mathfrak{N})$; at ſi n ſit numerus par, erit ultimum membrum $= \nu\, e^{-x}$; & penultimum $= \mu\, e^{x \cos A \frac{(n-2)\pi}{n}}$ ſin A $(x$ ſin A $\frac{(n-2)\pi}{n} + \mathfrak{M}.)$ Pro quovis ergo valore ipſius n integrale completum expedite asſignabitur. Q. E. J.

§. XXXIX.

Quo iſta integralia clarius ob oculos ponantur pro ſingulis valoribus ipſius n ab unitate incipiendo integralia æquationis $0 = y - \frac{d^n y}{dx^n}$ exhibeamus:

I. Hujus æquationis $0 = y - \frac{dy}{dx}$ integrale eſt:

$$y = \alpha\, e^{x}$$

II. Hujus æquationis $0 = y - \frac{ddy}{dx^2}$ integrale eſt:

$$y = \alpha\, e^{x} + \beta\, e^{-x}$$

III. Hujus æquationis $0 = y - \frac{d^3y}{dx^3}$ integrale eſt:

$$y = \alpha\, e^{x} + \beta\, e^{x \cos A \frac{2}{3}\pi} \sin A\, (x \sin A. \tfrac{2}{3}\pi + \mathfrak{B})$$

IV. Hujus æquationis $0 = y - \frac{d^4 y}{dx^4}$ integrale eſt:

$y =$

$$y = \alpha e^{x} + \beta \sin A\,(x + \mathfrak{B}) + \gamma e^{-x}$$

V. Hujus æquationis $0 = y - \frac{d^5 y}{dx^5}$ integrale eſt:

$$y = \alpha e^{x} + \beta e^{x \cos A \frac{2}{5}\pi} \sin A (x \sin A. \tfrac{2}{5}\pi + \mathfrak{B}) + \gamma e^{x \cos A \frac{4}{5}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{4}{5}\pi + \mathfrak{C})$$

VI. Hujus æquationis $0 = y - \frac{d^6 y}{dx^6}$ integrale eſt:

$$y = \alpha e^{x} + \beta e^{x \cos A \frac{1}{3}\pi} \sin A (x \sin A. \tfrac{1}{3}\pi + \mathfrak{B}) + \gamma e^{x \cos A \frac{2}{3}\pi} \sin A (x \sin A. \tfrac{2}{3}\pi + \mathfrak{C}) + \delta e^{-x}$$

VII. Hujus æquationis $0 = y - \frac{d^7 y}{dx^7}$ integrale eſt.

$$y = \alpha e^{x} + \beta e^{x \cos A \frac{2}{7}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{2}{7}\pi + \mathfrak{B}) + \gamma e^{x \cos A \frac{4}{7}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{4}{7}\pi + \mathfrak{C}) + \delta e^{x \cos A \frac{6}{7}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{6}{7}\pi + \mathfrak{D})$$

VIII. Hujus æquationis $0 = y - \frac{d^8 y}{dx^8}$ integrale eſt:

$$y = \alpha e^{x} + \beta e^{x \cos A \frac{1}{4}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{1}{4}\pi + \mathfrak{B}) + \gamma \sin A (x + \mathfrak{C}) + \delta e^{x \cos A \frac{3}{4}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{3}{4}\pi + \mathfrak{D}) + \varepsilon e^{-x} \quad \&c.$$

Problema. III.

§. XL. Si propoſita fuerit iſta æquatio differentialis gradus indefiniti n; $0 = y + \frac{d^n y}{dx^n}$, poſito elemento dx conſtante, ejus integrale invenire.

Solutio.

Poſito ſecundum regulam 1 pro y, & z^n pro $\frac{d^n y}{dx^n}$, prodibit iſta æquatio algebraica $0 = 1 + z^n$, quæ ſi n fuerit numerus impar, diviſorem ſimplicem realem habet $1 + z$, ex quo oritur $y = \alpha e^{-x}$. Reliqui diviſores ſimplices omnes ſunt imaginarii; horum vero bini continentur in hoc factore trinomiali reali: $1 - 2z \cos A. \frac{2k-1}{n}\pi + zz$, hæcque expreſſio omnes prorſus diviſores formæ $1 + z^n$ ſuggerit, ſi loco $2k-1$ omnes numeri impares ipſo n non majores ſucceſſive ſubſtituantur. Collata autem hac formula $1 - 2z \cos A. \frac{2k-1}{n}\pi + zz$ cum factore generali $ff - 2fz \cos A \Phi + zz$ fit $f = 1$ & $\Phi = \frac{2k-1}{n}\pi$; hinc ergo enaſcitur ſequens pro y valor generalis $y = \alpha e^{x \cos A \frac{2k-1}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{2k-1}{n}\pi + \mathfrak{A}\right)$.

Atque in hoc valore generali etiam continetur valor ipſius y ex factore ſimplici $1 + z$, ſi quidem n fuerit numerus impar, oriundus; prodit enim hoc caſu $y = \alpha e^{-x}$, ſi fiat $2k-1 = n$, tum enim fit $\cos A \frac{2k-1}{n}\pi = \cos A\pi = -1$, ejusque ſinus $= 0$. Integrale ergo completum æquationis propoſitæ invenietur, ſi in hac forma generali $y =$

$\alpha\ e$

$\alpha e^{x\cos A\frac{2k-1}{n}\pi}. \sin A\left(x\sin A\frac{2k-1}{n}\pi+\mathfrak{A}\right)$ loco $2k-1$ ſucceſſive omnes numeri impares 1, 3, 5, 7, &c. qui quidem exponente n non ſunt majores, ſubſtituantur, iſtique valores cuncti in unam ſummam colligantur. Prodibit ergo hoc modo integrale quæſitum & completum:

$$y=\alpha e^{x\cos A\frac{1}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A.\frac{1}{n}\pi+\mathfrak{A}\right)$$

$$+\beta e^{x\cos A.\frac{3}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A.\frac{3}{n}\pi+\mathfrak{B}\right)$$

$$+\gamma e^{x\cos A.\frac{5}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A.\frac{5}{n}\pi+\mathfrak{C}\right)$$

$$+\delta e^{x\cos A.\frac{7}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{7}{n}\pi+\mathfrak{D}\right)+\&c.$$

quæ membra eousque continuari debent, quoad n conſtantes arbitrariæ fuerint ingreſſæ; quod eveniet, ſi ex ſerie fractionum $\frac{1}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{5}{n}$, $\frac{7}{n}$ &c. omnes unitatem non ſuperantes capiantur. Fiet autem, ſi n ſit numerus par, membrum ultimum $\nu e^{x\cos A\frac{n-1}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{n-1}{n}\pi+\mathfrak{N}\right)$.

At ſi n numerus impar, membrum ultimum erit: νe^{-x}, penultimum vero $\mu e^{x \cos A \frac{n-2}{n}\pi} \sin A(x \sin A \frac{n-2}{n}\pi + \mathfrak{M})$ unde nullo negotio integrale completum quovis caſu aſſignatur. Q. E. J.

§. XLI.

Ad integrale hoc diſtinctius explicandum aliquot caſus ſimpliciores evolvamus, loco n ponendo, ut in præcedente problemate fecimus, numeros integros 1, 2, 3 . . . 8; quo vis hujus integrationis penitius perſpiciatur.

I. Hujus æquationis $0 = y + \frac{dy}{dx}$ integrale eſt:

$$y = \alpha e^{-x}$$

II. Hujus æquationis $0 = y + \frac{ddy}{dx^2}$ integrale eſt:

$$y = \alpha \sin A (x + \mathfrak{A})$$

III. Hujus æquationis $0 = y + \frac{d^3y}{dx^3}$ integrale eſt:

$$y = \alpha e^{x \cos A \frac{1}{3}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{1}{3}\pi + \mathfrak{A}) + \beta e^{-x}$$

IV. Hujus æquationis $0 = y + \frac{d^4y}{dx^4}$ integrale eſt:

$$y = \alpha e^{x \cos A \frac{1}{4}\pi} \sin A (x \sin A. \tfrac{1}{4}\pi + \mathfrak{A}) + \beta e^{x \cos A \frac{3}{4}\pi} \sin A (x \sin \tfrac{3}{4}\pi + \mathfrak{B})$$

V. Hujus æquationis $0 = y + \frac{d^5y}{dx^5}$ integrale eſt:

$y =$

$$y = \alpha e^{x \cos A \frac{1}{5}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{1}{5}\pi + \mathfrak{A}) + \beta e^{x \cos A \frac{3}{5}\pi} \sin A$$
$$(x \sin A . \tfrac{3}{5}\pi + \mathfrak{B}) + \gamma e^{-x}$$

VI. Hujus æquationis $0 = y + \frac{d^6 y}{dx^6}$ integrale eſt:

$$y = \alpha e^{x \cos A \frac{1}{6}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{1}{6}\pi + \mathfrak{A}) + \beta \sin A (x + \mathfrak{B})$$
$$+ \gamma e^{x \cos A \frac{5}{6}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{5}{6}\pi + \mathfrak{C})$$

VII. Hujus æquationis $= y + \frac{d^7 y}{dx^7}$ integrale eſt:

$$y = \alpha e^{x \cos A \frac{1}{7}\pi} \sin A (x \sin A . \tfrac{1}{7}\pi + \mathfrak{A}) + \beta e^{x \cos A . \frac{3}{7}\pi} \sin A .$$
$$(x \sin A \tfrac{3}{7}\pi + \mathfrak{B}) + \gamma e^{x \cos A . \frac{5}{7}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{5}{7}\pi + \mathfrak{C}) + \delta e^{-x}$$

VIII. Hujus æquationis: $0 = y + \frac{d^8 y}{dx^8}$ integrale eſt:

$$y = \alpha e^{x \cos A \frac{1}{8}\pi} \sin A (x \sin A \tfrac{1}{8}\pi + \mathfrak{A}) + \beta e^{x \cos A . \frac{3}{8}\pi} \sin A (x \sin A . \tfrac{3}{8}\pi + \mathfrak{B})$$
$$+ \gamma e^{x \cos A \frac{5}{8}\pi} \sin A (x \sin A . \tfrac{5}{8}\pi + \mathfrak{C}) + \delta e^{x \cos A \frac{7}{8}\pi} \sin A (x \sin A . \tfrac{7}{8}\pi + \mathfrak{D})$$

Problema. IV.

§. XLII.

Si propoſita fuerit æquatio differentialis gradus $2n$ hæc: $0 = y + \frac{2b\, d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$ poſito elemento dx conſtante; ejus integrale invenire; exiſtente $bb > 1$.

 Solu-

Si ſecundum regulam ponamus 1 pro y; z^n pro $\frac{d^n y}{dx^n}$, & z^{2n} pro $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$, prodit iſta æquatio algebraica $0 = 1 + 2b\, z^n + z^{2n}$, quæ ob $bb > 1$ in hos duos factores reſolvitur:

$$(z^n + b + \sqrt{(bb-1)})\,(z^n + b - \sqrt{(bb-1)})$$

Ponimus autem hic b quantitatem affirmativam; & hanc obrem tam $b + \sqrt{(bb-1)}$ quam $b - \sqrt{(bb-1)}$ erunt quantitates affirmativæ. Sit ergo $b + \sqrt{(bb-1)} = a^n$ & $b - \sqrt{(bb-1)} = b^n$, ita ut ſit $ab = 1$. Habebimus igitur iſtam æquationem in duos factores reales reſolutam: $0 = (z^n + a^n)(z^n + b^n)$: atque prioris factoris ſinguli factores trinomiales reales continebuntur in hac forma: $aa - 2az\,\mathrm{coſA}\,\frac{2k-1}{n}\pi + zz$: poſterioris vero in hac: $bb - 2bz\,\mathrm{coſA}\,\frac{2k-1}{n}\pi + zz$: Omnesque factores habebuntur, ſi in utraque forma ſucceſſive pro $2k-1$ ponantur omnes numeri impares 1, 3, 5, 7, &c. qui exponente n non ſint majores. Integrale ergo quæſitum ex his factoribus ita formabitur:

$$y = \mathrm{A}e^{ax\,\mathrm{coſA}\frac{1}{n}\pi}\,\mathrm{ſinA}(ax\,\mathrm{ſinA}\tfrac{1}{n}\pi + \mathfrak{A}) + \mathrm{B}e^{ax\,\mathrm{coſA}\frac{3}{n}}\,\mathrm{ſinA}(ax\,\mathrm{ſinA}\tfrac{3}{n}\pi + \mathfrak{B})$$
$$+ \mathrm{C}e^{ax\,\mathrm{coſA}\frac{5}{n}\pi}\,\mathrm{ſinA}(ax\,\mathrm{ſinA}\tfrac{5}{n}\pi + \mathfrak{E}) + \mathrm{D}e^{ax\,\mathrm{coſA}\frac{7}{n}\pi}\,\mathrm{ſinA}(ax\,\mathrm{ſinA}\tfrac{7}{n}\pi + \mathfrak{D}) + \&c.$$

+ a

$$+\alpha e^{bx\cos A\frac{1}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\tfrac{1}{n}\pi+\mathfrak{a}\right)+\beta e^{bx\cos A\frac{3}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\tfrac{3}{n}\pi+\mathfrak{b}\right)$$

$$+\gamma e^{bx\cos A\frac{5}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\tfrac{5}{n}\pi+\mathfrak{c}\right)+\&c.\quad \text{Q. E. J.}$$

Problema. V.

§. XLIII.

Si propoſita fuerit æquatio differentialis gradus indefiti $2n$ hæc: $0 = y - \frac{2bd^ny}{dx^n} + \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ ſumto dx conſtante, & exiſtente $bb > 1$; ejus integrale invenire.

Solutio.

Secundum regulam ſupra datam orietur hinc ſequens æquatio algebraica $0 = 1 - 2bz^n + z^{2n}$; quæ in hos duos factores reales primum reſolvitur:

$$0 = (z^n - b + \sqrt{(bb-1)})\,(z^n - b - \sqrt{(bb-1)}).)$$

Cum autem b denotet quantitatem poſitivam, ponatur $b + \sqrt{(bb-1)} = a^n$, & $b - \sqrt{(bb-1)} = b^n$, ita ut ſit $ab = 1$; hincque orietur iſta æquatio:

$$0 = (z^n - a^n)\,(z^n - b^n)$$

Prioris factoris $z^n - a^n$ omnes factores trinomiales reales continentur in hac forma $aa - 2az\cos A.\frac{2k}{n}\pi + zz$; poſterioris vero $z^n - b^n$ in hac forma $bb - 2bz\cos A.\frac{2k}{n}\pi + zz$:

zz: omnesque factores habebuntur, ſi in utraque forma loco $2k$ ſucceſſive ponantur omnes numeri pares $0, 2, 4, 6,$ &c. numero n non majores. Ex his itaque factoribus cognitis integrale quæſitum colligitur fore:

$$y = \begin{cases} \mathrm{A}e^{ax} + \mathrm{B}e^{ax\,\text{coſ}\,\mathrm{A}\frac{2}{n}\pi}\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\left(ax\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\frac{2}{n}\pi + \mathfrak{B}\right) \\ + \mathrm{C}e^{ax\,\text{coſ}\,\mathrm{A}.\frac{4}{n}\pi}\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\left(ax\,\text{coſ}\,\mathrm{A}\frac{4}{n}\pi + \mathfrak{C}\right) \\ + \mathrm{D}e^{ax\,\text{coſ}\,\mathrm{A}.\frac{6}{n}\pi}\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\left(ax\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\frac{6}{n}\pi + \mathfrak{D}\right) + \&c. \\ \alpha e^{bx} + \beta e^{bx\,\text{coſ}\,\mathrm{A}\frac{2}{n}\pi}\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\left(bx\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\frac{2}{n}\pi + \mathfrak{b}\right) \\ + \gamma e^{bx\,\text{coſ}\,\mathrm{A}.\frac{4}{n}\pi}\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\left(bx\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\frac{4}{n}\pi + \mathfrak{c}\right) \\ + \delta e^{bx\,\text{coſ}\,\mathrm{A}\frac{6}{n}\pi}\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\left(bx\,\text{ſin}\,\mathrm{A}\frac{6}{n}\pi + \mathfrak{d}\right) + \&c. \end{cases}$$

Q. E. J.

Problema. VI.

§. XLIV. Si propoſita fuerit æquatio differentialis gradus indefiniti hæc: $0 = y + \frac{2b\,d^n y}{dx^n} - \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$ ſumto elemento dx conſtante; ejus integrale invenire.

So-

Solutio.

Æquatio algebraica, quæ ſecundum præcepta hinc oritur : $0 = 1 + 2bz^n - z^{2n}$ in hos duos factores reales primum reſolvitur:

$$0 = (b + \sqrt{(bb+1)} - z^n)\ (-b + \sqrt{(bb+1)} + z^n)$$

Fiat, id quod ob b quantitatem poſitivam ſemper fieri poteſt $\sqrt{(bb+1)} + b = a^n$, & $\sqrt{(bb+1)} - b = b^n$ ita ut ſit $ab = 1$; hincque naſcetur iſta æquatio:

$$0 = (a^n - z^n)\ (b^n + z^n)$$

Prioris factoris $a^n - z^n$ factores trinomiales reales omnes continentur in hac forma $aa - 2az \operatorname{coſ} A \frac{2k}{n}\pi + zz$, poſterioris vero in hac: $bb - 2bz \operatorname{coſ} A \frac{2k-1}{n}\pi + zz$, omneſque factores habebuntur, ſi in priori loco $2k$ omnes numeri pares 0, 2, 4, 6, &c. in poſteriori vero loco $2k-1$ omnes impares 1, 3, 5, 7, &c. numerum n non excedentes ſucceſſive ſubſtituantur. Ex his ergo factoribus cognitis integrale quæſitum colligitur:

$$y = \left\{\begin{array}{l} A e^{ax} + B e^{ax \operatorname{coſ} A \frac{2}{n}\pi} \operatorname{ſin} A(ax \operatorname{ſin} A. \frac{2}{n}\pi + \mathfrak{B}) + C e^{ax \operatorname{coſ} A \frac{4}{n}\pi} \\ \operatorname{ſin} A(ax \operatorname{ſin} A \frac{4}{n}\pi + \mathfrak{C}) + D e^{ax \operatorname{coſ} A \frac{6}{n}\pi} \operatorname{ſin} A(ax \operatorname{ſin} A \frac{6}{n}\pi + \mathfrak{D}) \\ + \&c. \end{array}\right.$$

$$y = \alpha e^{bx \operatorname{cof} A \frac{1}{n}\pi} \operatorname{fin} A.(bx \operatorname{fin} A.\tfrac{1}{n}\pi + \mathfrak{a}) + \beta e^{bx \operatorname{cof} A \frac{3}{n}\pi} \operatorname{fin} A.(bx \operatorname{fin} A \tfrac{3}{n}\pi + \mathfrak{b}) + \gamma e^{bx \operatorname{cof} A. \frac{5}{n}\pi} \operatorname{fin} A.(bx \operatorname{fin} A \tfrac{5}{n}\pi + \mathfrak{c}) + \&c.$$

Q. E. J.

Problema. 7.

§. XLV. Si propoſita fuerit æquatio differentialis gradus indefiniti $2n$ hæc: $o = y - \frac{2b\,d^n y}{dx^n} - \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$, in qua poſitum eſt elementum dx conſtans: ejus integrale invenire.

Solutio.

Per ſubſtitutionem per regulam ſupra datam faciendam naſcitur hinc iſta æquatio algebraica ordinis $2n$:

$$o = 1 - 2bz^n - z^{2n}$$

quæ primum in hos duos factores reales diſcerpitur

$$o = (-b + V(bb+1) - z^n)\,(b + V(bb+1) + z^n)$$

Ob b quantitatem poſitivam ponatur $V(bb+1) + b = a^n$ & $(bb+1) - b = b^n$; ita ut ſit $ab = 1$. Atque ſequens habebitur æquatio reſolvenda:

$$o = (a^n + z^n)\,(b^n - z^n)$$

cujus prioris factoris $a^n + z^n$ omnes factores trinomiales continentur in hac forma: $aa - 2az \operatorname{cof} A \frac{2k-1}{n}\pi + zz$ po-

ſterioris

ſterioris vero in hac: $bb - 2bz\,\text{coſ}A.\frac{2k}{n}\pi + zz$; omnesque factores habebuntur, ſi in illa forma ponantur ſucceſſive omnes numeri impares 1, 3, 5, 7, &c. loco $2k-1$; in hac vero loco $2k$ omnes numeri pares 0, 2, 4, 6, &c. numero n non majores. Ex his itaque factoribus colligetur integrale quæſitum & completum: $y =$

$$A e^{ax\,\text{coſ}A\frac{1}{n}\pi}\,\text{ſin}A\left(ax\,\text{ſin}A\frac{1}{n}\pi + \mathfrak{A}\right)$$
$$+ B e^{ax\,\text{coſ}A.\frac{3}{n}\pi}\,\text{ſin}A\left(ax\,\text{ſin}A\frac{3}{n}\pi + \mathfrak{B}\right)$$
$$+ C e^{ax\,\text{coſ}A.\frac{5}{n}\pi}\,\text{ſin}A\left(ax\,\text{ſin}A\frac{5}{n}\pi + \mathfrak{C}\right) + \&c.$$
$$u e^{bx} + \beta e^{bx\,\text{coſ}A\frac{2}{n}\pi}\,\text{ſin}A\left(bx\,\text{ſin}A\frac{2}{n}\pi + \mathfrak{b}\right)$$
$$+ \gamma e^{bx\,\text{coſ}A.\frac{4}{n}\pi}\,\text{ſin}A\left(bx\,\text{ſin}A\frac{4}{n}\pi + \mathfrak{c}\right)$$
$$+ \delta e^{bx\,\text{coſ}A\frac{6}{n}\pi}\,\text{ſin}A\left(bx\,\text{ſin}A\frac{6}{n}\pi + \mathfrak{d}\right) + \&c.$$

Q. E. J.

Problema VIII.

§. XLVIII. Si propoſita fuerit hæc æquatio gradus indefiniti: $0 = y + \frac{2 b d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$, poſito elemento dx conſtante, & exiſtente $bb < 1$. ejus integrale completum invenire.

Solutio.

Æquatio algebraica ordinis $2n$ quæ hinc oritur eſt $0 = 1 + 2bz^n + z^{2n}$, ad cujus factores trinomiales reales omnes inveniendos, capiatur in circulo, cujus radius $= 1$ arcus ω cujus coſinus ſit $= b$, ita ut ſit $b = \text{coſ A}\,\omega$. Arcu hoc invento unusquisque factor trinomialis continebitur in hac forma:

$$1 - 2z\,\text{coſ A}\,\frac{k\pi - \omega}{n} + zz$$

ſubſtituendo loco k omnes numeros impares 1, 3, 5, 7, ... $(2n-1)$; ita ut horum factorum numerus futurus ſit n, uti numerus dimenſionum requirit. Ex his igitur factoribus cognitis reperietur ſecundum præcepta data integrale quæſitum æquationis propoſitæ:

$$y = \alpha e^{x\,\text{coſ A}\frac{\pi-\omega}{n}}\ \text{ſin A}\left(x\,\text{ſin A}\,\frac{\pi-\omega}{n} + a\right) + \beta e^{x\,\text{coſ A}\frac{3\pi-\omega}{n}}\ \text{ſin A}$$

$(x\,\text{ſin A}$

$$x \cos A \frac{5\pi-\omega}{n}$$

$$\left(x \sin A \frac{3\pi-\omega}{n} + \mathfrak{b}\right) + \gamma e \qquad \sin A\left(x \sin A \frac{5\pi-\omega}{n} + \mathfrak{c}\right)$$

$$x \cos A \frac{(2n-1)\pi-\omega}{n}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + \nu e \qquad \sin A\left(x \sin A \frac{(2n-1)\pi-\omega}{n} + \mathfrak{n}\right)$$

Numerus ſcilicet membrorum hoc integrale conſtituentium eſt n, indeque numerus conſtantium arbitrariarum ingredientium eſt $2n$, uti gradus differentialium æquationis propoſitæ requirit. Q. E. J.

Problema. IX.

§. XLVII. Exiſtente iterum $hh < 1$. ſi propoſita fuerit hæc æquatio differentialis gradus indefiniti $2n$: $0 = y - \frac{2h\,d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$, ſumto elemento dx conſtante, ejus integrale completum invenire.

Solutio.

Æquatio algebraica, quæ ſecundum præcepta tradita hinc deducitur, eſt $0 = 1 - 2hz^n + z^{2n}$, cujus ſinguli factores trinomiales reales, quorum numerus eſt n continentur in hac forma generali:

$$1 - 2z \cos A. \frac{h\pi - \omega}{n} + zz$$

 ſi loco

ſi loco k ſucceſſive omnes numeri pares 2, 4, 6, 8, &c. usque ad $2n$ incluſive ſubſtituantur. . Denotat hic autem uti ante ω arcum circuli, cujus coſinus eſt b, qui ob $b \prec 1$. ſemper aſſignari poteſt, ita ut ſit $b = \cos A\,\omega$. Cognitis autem factoribus omnibus æquationis $0 = 1 - 2bz^n + z^{2n}$, æquationis differentialis propoſitæ integrale completum erit:

$$y = \alpha e^{x \cos A \frac{2\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x \sin A.\frac{2\pi-\omega}{n} + \mathfrak{a}\right) + \beta e^{x \cos A \frac{4\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x \sin A.\frac{4\pi-\omega}{n} + \mathfrak{b}\right) + \gamma e^{x \cos A.\frac{6\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x \sin A.\frac{6\pi-\omega}{n} + \mathfrak{c}\right) + \delta e^{x \cos A.\frac{8\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x \sin A\frac{8\pi-\omega}{n} + \mathfrak{d}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ \nu e^{x \cos A.\frac{2n\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x \sin A.\frac{2n\pi-\omega}{n} + \mathfrak{n}\right)$$

Ingrediuntur enim in hanc expreſſionem $2n$ conſtantes arbitrariæ. Q. E. J.

Problema. X.

Problema. X.

§. XLVIII. Si propoſita fuerit æquatio differentialis indefiniti gradus hæc: $0 = y \pm \frac{2d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$ in qua differentiale dx poſitum eſt conſtans: ejus integrale invenire.

Solutio.

Æquatio algebraica quæ hinc formatur eſt: $0 = 1 \pm 2z^n + z^{2n} = (1 \pm z^n)^2$, quæ cum ſit quadratum omnes ejus factores erunt quadrati: pro ſigno ergo ſuperiori hæc forma $\left(1 - 2z\,\mathrm{coſ}\,A.\frac{2k-1}{n}\pi + zz\right)^2$ omnes continet factores; pro ſigno inferiori autem hæc forma $\left(1 - 2z\,\mathrm{coſ}\,A.\frac{2k}{n}\pi + zz\right)^2$. Ex his factoribus cognitis reperietur pro ſigno inferiori ſeu æquationis $0 = y - \frac{2d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$ integrale completum:

$$y = \begin{cases} Ae^{x} + Be^{x\,\mathrm{coſ}\,A.\frac{2}{n}\pi}\,\mathrm{ſin}\,A\left(x\,\mathrm{ſin}\,A\frac{2}{n}\pi + \mathfrak{B}\right) + Ce^{x\,\mathrm{coſ}\,A.\frac{4}{n}\pi} \\ \mathrm{ſin}\,A\left(x\,\mathrm{ſin}\,A.\frac{4}{n}\pi + \mathfrak{C}\right) + \&c. \\ \alpha x e^{x} + \beta x e^{x\,\mathrm{coſ}\,A.\frac{2}{n}\pi}\,\mathrm{ſin}\,A\left(x\,\mathrm{ſin}\,A\frac{2}{n}\pi + \mathfrak{b}\right) + \gamma x e^{x\,\mathrm{coſ}\,A.\frac{4}{n}\pi} \\ \mathrm{ſin}\,A\left(x\,\mathrm{ſin}\,A.\frac{4}{n}\pi + \mathfrak{c}\right) + \&c. \end{cases}$$

Hu-

Hujus vero æquationis $0 = y + \frac{2d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$ integrale erit

$$y = \left\{ \begin{array}{l} A e^{x \cos A.\frac{1}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A.\frac{1}{n}\pi + \mathfrak{A} \right) \\ + B e^{x \cos A.\frac{3}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A.\frac{3}{n}\pi + \mathfrak{B} \right) \\ + C e^{x \cos A.\frac{5}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A.\frac{5}{n}\pi + \mathfrak{C} \right) + \&c. \\ \alpha x e^{x \cos A.\frac{1}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A.\frac{1}{n}\pi + \mathfrak{a} \right) \\ + \beta x e^{x \cos A.\frac{3}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A.\frac{3}{n}\pi + \mathfrak{b} \right) \\ \gamma x e^{x \cos A.\frac{5}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A.\frac{5}{n}\pi + \mathfrak{c} \right) + \&c \end{array} \right.$$

Q. E. J.

§. XLIX. Ex his allatis exemplis jam abunde perſpicitur quemadmodum omnes æquationes differentiales cujus-

cunque

cunque gradus, quæ quidem contineantur in hac forma

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \&c.$$

denotantibus litteris A, B, C, D, &c. coefficientes conſtantes, tractari; earum integralia completa inveniri oporteat. Unica nimirum difficultas reſidet in reſolutione æquationum algebraicarum in factores reales ſive ſimplices ſive trinomiales; quam autem in hoc negotio, quippe ab algebra pendentem merito tanquam datam aſſumere poſſumus. At vero hæc eadem methodus adhiberi poteſt quoque in æquationibus hujusmodi, quarum termini in infinitum progrediuntur, dummodo æquationum algebraicarum, quæ inde formantur, omnes aſſignari queant radices. Hunc igitur uſum unico exemplo declarabimus, alia forte occaſione hanc æquationum differentialium infiniti gradus integrationem fuſius expoſituri.

Problema. XI.

§. L. Si propoſita fuerit iſta æquatio differentialis in infinitum excurrens:

$$0 = y - \frac{ddy}{2dx^2} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^6y}{720dx^6} + \frac{d^8y}{40320dx^8} - \&c.$$

in qua differentiale dx poſitum eſt conſtans; ejus integrale completum invenire.

Solutio.

Scripto 1 pro y, & z^k pro differentiali cujusvis gradus

$\frac{d^k y}{dx^k}$, orietur iſta æquatio in infinitum excurrens $0 = 1 - \frac{z^2}{1.2.} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{z^8}{1.2.\ldots.8} -$ &c. quæ convenit cum hac $0 = \text{coſ} A. z$. Hujus ergo æquationis radices ſunt omnes arcus circuli radii $= 1$; quorum coſinus evaneſcunt. Quocirca omnes poſſibiles valores ipſius z erunt ſequentes:

$$\pm \frac{\pi}{2};\ \pm \frac{3\pi}{2};\ \pm \frac{5\pi}{2};\ \pm \frac{7\pi}{2};\ \pm \frac{9\pi}{2}\ \text{\&c.}$$

His igitur radicibus ac proinde diviſoribus ſimplicibus æquationis illius cognitis, qui omnes ſunt reales; æquationis differentialis propoſitæ integrale completum erit:

$$y = \alpha e^{\frac{\pi x}{2}} + \mathfrak{a} e^{\frac{-\pi x}{x}} + \beta e^{\frac{3\pi x}{2}} + \mathfrak{b} e^{\frac{-3\pi x}{2}} + \gamma e^{\frac{5\pi x}{2}} + \mathfrak{c} e^{\frac{-5\pi x}{2}}$$

$$+ \delta e^{\frac{7\pi x}{2}} + \mathfrak{d} e^{\frac{-7\pi x}{2}} + \text{\&c. in infinitum.}$$

Atque unus quisque terminus ſeorſim ſumtus, vel plures juncti dabunt integrale particulare æquationis differentialis propoſitæ. Q. E. J.

Con-

Conſpectus Trigonoſcopici Continuatio cum adjectis curioſis nonnullis Problematis Algebraicis.

AUTORE

Philippo Naudæo.

NOva cum ſe offerat occaſio, in gratiam Geometriæ ſtudioſorum, coeptam à nobis ſuperiori horum Miſcellaneorum Tomo 5to Trigonoſcopiam ulterius proſequi animus eſt: Utut enim Geometriam Elementarem modo reſpiciant, quæ hic ſoluturi ſumus Problemata, ea tamen Lectoribus φιλομαθεστέροις minus diſplicitura eſſe confidimus, quod per ſe non inamoena, neque uſu plane deſtituta videantur, cum nulla ſit veritas omnino ſterilis inutilisve, nulla, quamvis videatur levis, quæ non ſit in nexu aliquo, etiam neceſſario, cum alia ſublimiori, altiorisque indaginis, proindeque olim profutura; unde omni veritati locum ſibi hic vindicare licebit, dum nova ſit. Præterea, eo etiam nomine Geometriæ Elementaris fines prolatare convenit, quod per illam facilior ſemper pateat aditus altiora petentibus; unde ſperamus, operam hanc

minime inanem viſum iri illis, quibus curæ cordique eſt Geometria Theoretica, neque illis, quibus ad ſublimiorem Matheſin aliquando penetrare animus eſt, cum in hac, & in ſcriptis maximi nominis Mathematicorum omnibus, progresſus quis ſemper facturus ſit eo majores, quo fuerit Geometriæ Elementaris peritior. Prius vero quam ad rem ipſam nos accingamus, e re eſſe viſum eſt, Lectorem Geometram monuiſſe, quod illorum, quæ in hac Trigonoſcopia dicta fuerint, ut commodior aliquando ſit uſus, faciliorque fiat citatio illarum; ûbi res poſtulaverit, nos harum Propoſitionum numeros, illis ab initio datos, ordine naturali hic ſemper eſſe continuaturos; Cumque in horum Miſcellaneorum Tomo 5to, ad Propoſitionem undecimam ſubſtiterimus, ſit itaque hic

Trigonoſcopiæ

Propoſitio 12ma. Problema Tabula. III. Fig. 1.

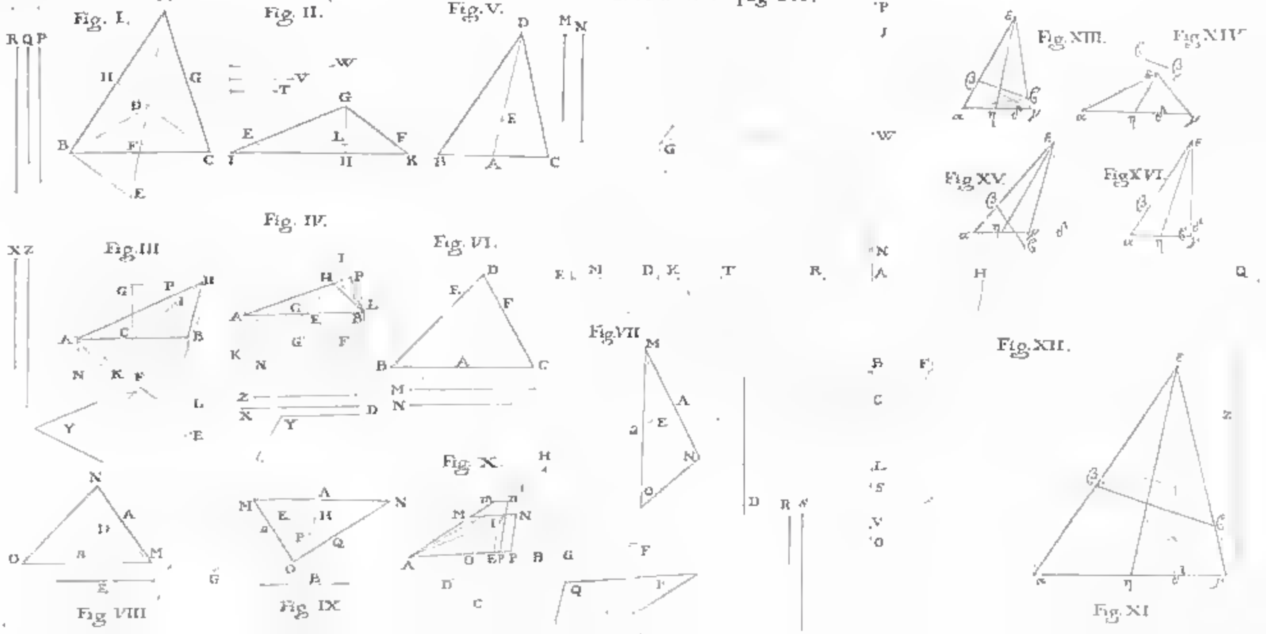
Datis magnitudine Trianguli tribus rectis P; Q; R, quæ ab angulo qvovis oppoſitum latus biſecant; conſtruere hoc Triangulum.

Conſtructio.

Datæ cujusvis rectæ ſumantur duæ tertiæ partes, cumque his $\frac{2}{3}$ P; $\frac{2}{3}$ Q; $\frac{2}{3}$ R conſtruatur Triangulum BDE; hujus Trianguli BDE latus aliquod DE biſecetur in F, ac per F & per oppoſitum ſibi angulum B recta producatur BF in C, ut ſit FC par FB, latusque ED etiam, alterutram ſui extremitatem verſus producatur in A, ut ſit DA par DE, & rectis puncta junge A; B; C; Dico factum, atque quæſitum Triangulum eſſe ABC.

Demon

Tabula III. pag 244.



Demonſtratio.

Producantur rectæ CD ad H, & BD ad G; Hoc ut demonſtremus, prænotum hic ſupponemus, quod Geometris notiſſimum, & paſſim eſt demonſtratum, ut inter alios, à Des-Chales, Mundi ſui Mathem[ci] Tomo 2[do] pag. 345, Prop. 4[ta] & pag. 346, Prop. 7. nimirum: Trianguli cujusvis centrum gravitatis eſſe, in recta ab aliquo angulo ad medium oppoſiti lateris ducta, & quidem in puncto, quod ejus rectæ tertiam abſcindat partem, biſecto lateri proximam; Unde, cum Trianguli centrum gravitatis ſit punctum unicum, conſequens eſt, ut tres rectæ à quovis angulo latera ſibi oppoſita biſecantes ſeſe invicem in unico puncto decuſſent, & ut hoc punctum de quavis harum tertiam abſcindat partem. His præmiſſis, BC hic ex conſtr. eſt biſecta in F, & FD etiam par facta FE, ut & DA æqualis facta eſt ipſi DE, quæ aſſumta fuerat $\frac{2}{3}$ P; unde AF, quæ eſt DA + DF ſive $\frac{2}{3}$ P + $\frac{1}{3}$ P erit P, atque ideo D jam eſt centrum gravitatis Trianguli ABC. Porro ob æquales factas tam FD, FE quam FC, FB, ſequitur C; D; B; E eſſe puncta quatuor alicujus Rhomboidis, proindeque DC eſſe parallelam & æqualem ipſi BE, quæ erat $\frac{2}{3}$ Q; at ob CDH parallelam BE, & DA dimidiam ipſius AE, erit etiam H medium ipſius AB, & BE ſeu $\frac{2}{3}$ Q dupla DH, quæ ergo eſt $\frac{1}{3}$ Q, unde CH ſive DC + DH ſive $\frac{2}{3}$ Q + $\frac{1}{3}$ Q valebit Q. Hinc tandem ſequitur, rectam BD per B & per centrum gravitatis D actam, productamque in G, latus ſibi oppoſitum AC etiam biſecare debere, ita ut BD ſit $\frac{2}{3}$

ipſius BG; Sed etiam BD aſſumta fuerat ⅔ R, unde & BG æqualis R; ergo Triangulum ABC, illud ipſum eſt quod petebatur. Q. F. E. D. E.

Propoſitio 13. Problema. Fig. 2.

Datis magnitudine tribus rectis T; V, W quæ ſint perpendiculares e quovis angulo cujusdam Trianguli ductæ in oppoſita latera; conſtruere hoc Triangulum.

Conſtructio.

Datarum minimæ T, mediæ V, atque maximæ W quæratur 4ta proportionalis S; tum huic S tanquam baſi, æqualis ponatur EF, intervallo mediæ V arcus deſcribatur in G, ac centro E, intervallo maximæ W ſectio fiat in G, & protractæ ducantur GE, GF; tum ex G in baſin demiſſo perpendiculo, in illud ponatur GH æqualis minimæ T, & ex H ducta ipſi EF parallela KJ; Dico factum; & GKJ eſſe Triangulum quæſitum.

Demonſtratio.

Manifeſtum eſt in quæſito Triangulo nil aliud requiri, niſi ut datæ, T, V, W ſint ejus perpendiculares, & ut idem productum ſemper prodeat, ducendo quamque normalem in latus ſibi oppoſitum; Patet autem, quod ſi hæ perpendiculares dictæ ſint *a*; *b*; *c*, tum ad id debeant latera reſpective oppoſita eſſe in ratione planorum alternativorum ex his *a*; *b*; *c*, id eſt Trianguli latera debere eſſe in ratione *bc*; *ca*, *ba*, apertum enim eſt, tum cujusvis perpendicularis productum in latus ſibi oppoſitum, fore ubique idem, nempe

abc.

abc. Atqui hoc ipſum etiam præſtitit conſtructio; Etenim, quoniam ipſis *a*; *b*; *c* 4ta proportionalis $\frac{bc}{a}$ facta fuit baſis EF, & FG = *b*; EF = *c*, ſunt ergo laterum EF; FG, EG valores, $\frac{bc}{a}$; *b*; *c* hæc autem ſi ducamus in *a*; patebit illa latera eſſe in quæſita ratione *bc*; *ba*; *ca*. Unde & latera Trianguli GJK, quod ipſi EFG ſimile factum eſt, etiam erunt reſpective in dicta illa ratione, ut *bc*; *ba*; *ca*. Sed præterea hujus Trianguli GJK perpendicularis eſt facta GH = *a*; Unde jam Triangulum GJK non modo erit quæſito Triangulo ſimile, ſed etiam æquale, gaudens quippe omnibus in quæſito Triangulo requiſitis.

Propoſito 14. Problema. Figg. 3. & 4.

Conſtruere Triangulum, cujus baſis ſit data recta X, angulus ipſi oppoſitus Y, & ſumma quadratorum e cruribus factorum æquetur quadrato datæ rectæ Z.

Conſtructio.

In altero extremo A rectæ AB ipſi X æqualis, fiat per AK angulus BAK æqualis angulo dato Y, & erecta in A ipſi AK, perpendiculari AG, verſus B, cui occurrat in G normalis erecta in medio ipſius AB, centro G radio GA arcus ſupra AEB deſcribatur AHB; fiat in altero ipſius AB extremo B angulus rectus, quem biſecet recta BF; Hoc facto, in caſu 1mo Fig.æ 3. ubi datus angulus Y eſt acutus fiat centro A intervallo datæ Z ſectio in E, ac per E in

BF

BF normalis EF; tum facta BL æquali BF ſi centro C radio CL fiat ſectio H in arcu AHB, ducanturque rectæ HA; HB; Dico Triangulum AHB fore quæſitum.

In caſu vero 2do Fig.æ 4 ubi angulus datus Y eſt obtuſus, fiat BD æqualis Z, tum centro D radio AB ſectione facta in E, ex E in BF demiſſa perpendiculari EF, atque ex centro E facta etiam intervallo BC, ſectione L; ſi tum intervallo FL & centro C ſectio fiat H in deſcripto arcu AHB junganturque rectæ HA, HB, dico factum; & AHB fore Triangulum quæſitum.

Demonſtratio.

Centro C radio CA circulus deſcribatur occurrens ipſi AH in P, in illo per H & C age diametrum NJ & junge BP. Cum angulus BAK ipſi Y fuerit factus æqualis, atque centro G radio GA deſcriptus ſit arcus AHB, patet jam per 33. lib. 3. Elem. ſegmentum AHB dati anguli Y capax eſſe, atque adeo Triangulum AHB habere jam baſin AB æqualem propoſitæ X, nec non angulum ipſi oppoſitum AHB, æqualem dato Y. Porro autem.

In caſu anguli acuti Fig.æ 3. ex extremitate A ipſius AB æqualis X tanquam centro, & intervallo datæ Z ſectio E facta eſt, unde per 47. l. 1mi $BE^2 = Z^2 - X^2$; atque Triangulum BFE factum eſt Rectangulum iſosceles, ergo BF^2 ſive etiam BL^2 valebit $\frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{2} X^2$; quare, ſi jungeretur recta CL, eſſet per 47. l. 1. $CL^2 = BC^2 + BL^2$ id eſt $\frac{1}{4} X^2 + \frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{2} X^2$ ſive $\frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{4} X^2$. Sed

centro

centro C radio CL etiam ſectio facta eſt in H, unde erit etiam $CH^2 = \frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{4} X^2$. Eſt autem hic NJ ſecta æqualiter in C, & recta illi adjecta JH; unde per 6tam 2di □lum NHJ valebit $CH^2 - CJ^2$ id eſt $\frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{2} X^2$ ſive $\frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{2} AB^2$; ergo duplicando erit $Z^2 - AB^2 = 2$ □lo NHJ ſive etiam 2□lo AHP; unde Z^2 æquatur $AB^2 +$ 2□lo AHP. Atqui cum angulus APB ſit in ſemicirculo, eſt BP in AH normalis, quare idem hoc $AB^2 +$ 2□lum AHP etiam per 13tiam. lib. 2di æquabitur $HA^2 + HB^2$; unde Z^2 etiam æquale erit $HA^2 + HB^2$. Quod erat demonſtrandum.

In caſu anguli obtuſi Fig.æ 4. Cum poſita fuerit BD æqualis Z, & centro D radio X ſive AB facta ſectio E, erit per 47. l.1mi $BE^2 = X^2 - Z^2$; ſed Triangulum BFE factum eſt Rectangulum & iſoſceles ergo $EF^2 = \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} Z^2$; dein centro E radio CB ſive $\frac{1}{2}$ X facta fuit ſectio in L, unde per 47. l.1 FL^2 valebit $EL^2 - EF^2$ ſeu $CB^2 - EF^2$ id eſt, $\frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{4} X^2$, cui etiam æquabitur CH^2, cum CH ab FL fuerit deſumta. Jam vero eſt NJ ſecta æqualiter in C & inæqualiter in H, unde per 5tam 2di erit $CJ^2 - CH^2 =$ □lo NHJ id eſt $\frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} Z^2$ æquatur □ NHJ; adeoque etiam □lo AHP; & duplicando erit ergo 2□lum AHP æquale $X^2 - Z^2$; unde $Z^2 = X^2 - 2$□ AHP hoc eſt $AB^2 - 2$□ AHP. Sed cum, ob angulum APB in ſemicirculo ſit PB perpend.ris in AP, erit idem hoc $AB^2 -$ 2□ AHP etiam per 12am 2di æquale $HA^2 + HB^2$; unde

ſequi-

ſequitur etiam $HA^2 + HB^2$ æquari ipſi Z^2; Q. E. D.

Propoſitio 15. Problema. Fig. 5.

Dato poſitione puncto A medio baſis alicujus Trianguli, & longitudine etiam datis duabus rectis M & N, quæ a qualibet baſis extremitate reliqua latera biſecant; conſtruere hoc Triangulum.

Conſtructio.

Problema hoc eſt indeterminatum. Nam ducta utcunque recta BC per punctum poſitione datum A, ſic tamen, ut ad libitum ſumtis æqualibus AB & AC, tota BC ſit minor quam $\frac{2}{3}$ M + $\frac{2}{3}$ N; ſi centro B intervallo $\frac{2}{3}$ M fiat arcus, & in illo arcu ſectio fiat E centro C & intervallo $\frac{2}{3}$ N, tum ſi in producta AE fiat ED æqualis 2 AE, & jungantur DB & DC; Dico factum, atque Triangulum BDC fore quæſitum, cujus quidem Demonſtratio patet, verbo enim poſſet elici, e binis Propoſitionibus ipſius Des-Chales a nobis ſupra ad Propoſitionem 12 allegatis.

Propoſitio 16. Problema. Fig. 6.

Dato poſitione puncto A medio baſis alicujus Trianguli, & magnitudine etiam datis duabus rectis M & N quæ a qualibet baſis extremitate in reliqua latera ducuntur perpendiculares; conſtruere hoc Triangulum.

Conſtructio.

Et hoc Problema erit indeterminatum. Nam ducta utcunque recta per punctum poſitione datum A, ſic ut ad libitum ſumtis æqualibus AB; AC, tota tamen BC utramvis datarum M & N excedat. Supra BC tanquam diametro de-

deſcripto ſemicirculo, huic ex C recta CE inſcribatur datæ N æqualis, nec non alia ex B eidem inſcribatur BF alteri datæ M æqualis; tum ſi per B & E recta ducatur, & per C & F altera, quæ priori occurrat in D; Dico factum, atque Triangulum BCD fore quæſitum, gaudens quippe omnibus propoſitis conditionibus, eſſetque ejus Demonſtratio manifeſta per 31am 3tii Eucl.

Propoſitio. 17. Problema. Fig. 7.

Dato poſitione puncto. A medio primi lateris alicujus Trianguli, atque poſitione dato etiam puncto a *medio ſecundi lateris, ac magnitudine data recta D quæ per angulum ab his comprehenſum biſecat latus tertium, illi angulo oppoſitum; conſtruere hoc Triangulum.*

Conſtructio.

Hoc etiam eſt Problema indeterminatum. Nam juncta recta Aa, biſecetur in E, & in medio illo puncto E ad angulum quemlibet ſupra illam inclinetur EM æqualis dimidiæ datæ D; tum productis rectis MA; Ma ita, ut ſit AN æqualis AM; & aO æqualis aM; Dico factum, & Triangulum MNO omnibus gaudere requiſitis conditionibus; Cujus Demonſtratio rurſus eſt evidens.

Propoſitio 18. Problema. Fig. 8.

Dato poſitione puncto A medio primi lateris alicujus Trianguli, & dato etiam poſitione puncto a *medio ſecundi lateris, ac magnitudine data recta E quæ ex angulo ab illis comprehenſo normaliter cadit in latus tertium, conſtruere hoc Triangulum.*

Conſtructio.

Et hoc denuo eſt Problema indeterminatum. Nam juncta recta Aa, ſi in aliquo ejus puncto ad libitum aſſumto D erigatur perpendicularis DM æqualis dimidiæ datæ E, & productis rectis MA & Ma ita, ut ſit AN æqualis AM, ut & aO æqualis aM; Dico factum, & Triangulum MNO omnibus gaudere requiſitis; cujus demonſtratio denuo eſt manifeſta.

Propoſitio 19. Problema. Fig. 9.

Dato poſitione puncto A medio primi lateris alicujus Trianguli, & poſitione dato etiam puncto a *medio ſecundi lateris, ac magnitudine data ſit recta B, quæ angulum ab illis comprehenſum biſecat; conſtruere illud Triangulum.*

Conſtructio.

Rurſus & hoc eſt Problema indeterminatum. Nam juncta recta Aa, ſi ſecetur in puncto quovis E, & in altera ſui extremitate A facto per rectam AP angulo quocunque EAP, ſi AP fiat æqualis AE, & PH æqualis aE, atque ducta recta Ha, huic parallela per P agatur PG, tum ſupra EG tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus, ac illi inſcribatur centro E corda EM æqualis dimidiæ datæ B, tum productis rectis MA, & Ma ita, ut ſit AN æqualis MA, & aO æqualis aM; Dico factum, & Triangulum MNO requiſita habere cuncta.

Demonſtratio.

Cum facta ſit AP par AE, & PH par aE, erit ergo AE. aE::

aE:: AP, PH; ſed ob parallelas PG, & Ha, eſt etiam AP. PH:: AG. aG unde ex æquo erit AG. aG:: AE. Ea; Cum itaque tota AG in E & a ſit ita ſecta, ut ſit tota AG ad alteram partem extremam Ga, ut extrema altera AE ad mediam partem Ea; & præterea, ſupra EG tanquam diametro deſcriptus ſemicirculus EMG, a cujus perimetri puncto aliquo M rectæ ad A & a ductæ ſunt MA & Ma, ſequitur per Propoſ. 9am hujus ipſius Trigonoſcopiæ, Tomo Miſcellaneorum horum 4to quod in Triangulo AaM, debeat eſſe MA ad Ma ut AE ad Ea. Hinc vero ſequitur per 3tiam 6ti Elem. rectam ME debere angulum aMA biſecare; Præterea vero ME facta eſt æqualis dimidiæ datæ B, ac æqualibus factis AN, AM ut & aM; aO, ducta eſt NO; unde & EQ æquabitur EM, eritque adeo QM = B; quæ in Triangulo MNO biſecat angulum NMO; Porro ſunt puncta etiam A & a, media laterum MN; MO; omnia itaque habet Triangulum MNO quæ petebantur requiſita. Q. F. E. D. E.

Propoſitio 20. Problèma. Vide Fig. 11.

Dato poſitione puncto β in quo occurrit lateri primo alicujus Trianguli recta quæ ab angulo ſibi oppoſito perpendiculariter in ipſum cadit; & etiam poſitione dato puncto Ϭ, in quo occurrit ſecundo lateri recta quæ ex oppoſito ſibi angulo in ipſum perpendiculariter cadit; ac denique magnitudine data recta Z quæ latus tertium ab angulo ſibi oppoſito biſecat; conſtruere hoc Triangulum.

Et hoc denuo eſt Problema indeterminatum, ſed usque adeo compoſitum, ut ægrius illud ſolvi, neque conſtructio-

 nem

nem aliquam nanciſci poſſit per Syntheſin; at vero per Analyſin hujus Problematis ſequens elicitur

Conſtructio.

Cum datorum punctorum β & ϵ diſtantia $\beta\epsilon$ ſit multo minor quam data recta Z, quæ tertium latus debet biſecare, indicio illud eſt, angulum tertio huic lateri oppoſitum, ſeu ipſi $\beta\epsilon$ oppoſitum eſſe acutum, ut in hac Fig. 11. & quod proinde pro ſemiſſe tertii hujus lateris $\alpha\eta$ liceat arbitrariam quandam x aſſumere, quæ ſit minor quam data Z, major vero quam $\frac{1}{2}$ $\beta\epsilon$. Quod ſi contra, ut in caſu Fig. 14. illa diſtantia $\beta\epsilon$ fere æqualis, ſeu etiam minor fuiſſet quam Z, indicaret hoc, dictum angulum ipſi $\beta\epsilon$ oppoſitum eſſe obtuſum, atque tum pro ſemi-latere tertio $\alpha\eta$ aſſumenda eſſet arbitraria quæpiam x ſive $\beta\epsilon$ non modo major quam $\frac{1}{2}$ $\beta\epsilon$ ſed & major etiam data Z. Tum in Fig 11. intervallo arbitrariæ hujus x & centris β & ϵ fiat infra rectam $\beta\epsilon$ ſectio η, atque intervallo eodem & centro η circulus deſcribatur. Deinde ductis in Fig. 12. ad rectos angulos duabus rectis OP, EQ, fiat AB æqualis $\beta\eta$ ſeu arbitrariæ x; AD æqualis datæ Z; AC vero datorum punctorum β & ϵ diſtantiæ $\beta\epsilon$; ducatur BD & per C huic parallela CE. Supra majori duarum AC vel AE tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus, ut & ſemicirculus etiam ſupra majori duarum AB vel AC, tanquam diametro & in illis binæ erigantur ordinatæ rectæ usque in G & F, in extremitatibus binarum minorum, quæ hic ſunt AD & AB, & quæ tamen forent

AC

AC & AF eo caſu, ſi angulus ipſi $\beta\epsilon$ oppoſitus eſſet obtuſus, id eſt, ſi $\beta\epsilon$ eſſet major data Z; Centro A intervallo AG arcus fiat GJ, nec non centro A radio AF etiam arcus FH. In extremitate minoris e duabus AB, AD ut centro, & intervallo majoris fiat ſectio K, & ipſi AK æqualis ſit AL, (in altero caſu, cum AD foret minor quam AB, tum caderet punctum K in AO, & L in AE). Dein intervallum ex L in K transferatur in AM, & intervallum ab J ad H ponatur in AP, & eodem etiam radio, & centro M fiat in AJ ſectio N; ſumtâque AQ æquali diſtantiæ ex M ad P & CO æquali CA, ducatur OQ, & huic per N parallela NR. Tunc centro R, radio AD facta ſectione S, & TR æquali AB, fiet AV par diſtantiæ T ad S. Denique ex V ducatur VK, ad lineæ AE punctum K vel L (hic eſt K, eſſet vero L in caſu anguli obtuſi) & in illius VK extremitate K erigatur ipſi normalis KW. Quo facto, & ad Fig. 11. redeundo, ſi angulus ipſi $\beta\epsilon$ oppoſitus ſit acutus ut hic, ubi AD vel Z excedit AB vel $\beta\epsilon$, tum ex altero e datis punctis β tanquam centro, intervallo AW fiat arcus ad partem ipſius $\beta\epsilon$ puncto η oppoſitum, (ſi vero alter caſus eſſet ubi AD minor quam AB, tum arcus faciendus eſſet ad ipſius $\beta\epsilon$ partem, ubi η, ut in Fig. 14. Dein centro η & radio AD ſive Z facienda eſt in illo arcu ſectio ϵ, ductisque per ϵ rectis $\epsilon\beta$ & $\epsilon\epsilon$, donec pertingant ad circulum in punctis α & γ; Dico Δlum quæſitum fore $\alpha\gamma\epsilon$.

Ubi vero ſub hujus Conſtructionis operationem, perventum eſt ad locum illum, ubi ducta eſt NR parallela ipſi

OQ,

OQ, ſi tum reperiretur AR eſſe æqualis ipſi $\beta\eta$, ſeu arbitrariæ x, ut in caſu Fig.æ 16, quo $\eta\delta$ æquatur $\eta\gamma$ facilius tum haberetur quæſitum Triangulum $\alpha\gamma\varepsilon$; etenim indicio hoc eſſet, quæſiti Trianguli alterum angulum γ adjacentem lateri biſecto, fore rectum, quo caſu facilius quæſitum Δ^{lum} $\alpha\gamma\varepsilon$ ſic obtineretur. Scilicet ab altero dato puncto β, ducenda eſſet per η diameter $\beta\eta\alpha$, in ejus altero extremo V erectæ perpendiculari $\varepsilon\gamma$ occurrat in ε, recta per alterum extremum α, & per datum alterum punctum β ducta; Sin autem illa AR Fig.æ 12. reperiretur major quam x ſive $\beta\eta$ Fig.æ 11mæ tum foret hoc indicio, quod ut in caſu Fig.æ 15. quæſitum Triangulum $\alpha\gamma\varepsilon$ haberet obtuſum angulum in baſis $\alpha\gamma$ altera extremitate γ. Cæterum ſuppeditavit præcedentem Conſtructionem quæ hic ſequitur

Analyſis. Fig. 11. 13. 14. 15. 16.

Rem ſupponendo factam, & $\alpha\gamma\varepsilon$ eſſe Triangulum quæſitum. Vocetur $\beta\beta = b$; $\varepsilon\eta = Z = a$; $\alpha\eta = \eta\gamma = x$ & $\eta\delta = y$. Hinc ergo erunt Denominationes

$\alpha\delta = x + y$. Jam vero ſim. Δ^{la} $\alpha\delta\varepsilon$; $\alpha\beta\gamma$ dabunt

$\gamma\delta = x - y$

$\varepsilon\delta = \sqrt{aa - yy}$ $\quad \overset{\alpha\varepsilon}{\sqrt{aa + xx + 2xy}} \cdot \overset{\delta\varepsilon}{\sqrt{aa - yy}} :: \overset{\alpha\gamma}{2x} \cdot \beta\gamma = \frac{2x\sqrt{aa - yy}}{\sqrt{aa + xx + 2xy}}$

$\alpha\varepsilon = \sqrt{aa + xx + 2xy}$ $\quad$ ſimilia vero $\gamma\delta\varepsilon$; $\gamma\beta\alpha$ dabunt

$\gamma\varepsilon = \sqrt{aa + xx - 2xy}$ $\quad \overset{\varepsilon\gamma}{\sqrt{(aa + xx - 2xy)}} . \overset{\varepsilon\delta}{\sqrt{(aa - yy)}} :: \overset{\alpha\gamma}{2x} : \alpha\beta = \frac{2x\sqrt{(aa - yy)}}{\sqrt{(aa + xx - 2xy)}}$

$$\alpha\varepsilon \quad . \quad \alpha\delta \quad :: \alpha\gamma$$

$$\sqrt{(aa+xx+2xy)} \,.\, x+y \,::\, 2x \,.\, \alpha\beta = \frac{2xx+2xy}{\sqrt{(a^2+x^2+2xy)}}$$

atque porro ſimiliter erit

$$\gamma\varepsilon \quad . \quad \gamma\delta \quad :: \alpha\gamma$$

$$\sqrt{(aa+xx-2xy)} \,.\, x-y \,::\, 2x \,.\, \gamma\epsilon = \frac{2xx-2xy}{\sqrt{(aa+xx-2xy)}}$$

Unde jam etiam erit $\varepsilon\beta$ quæ eſt

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\varepsilon - \alpha\beta \\ \alpha\beta - \alpha\varepsilon \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} \dfrac{aa-xx}{\sqrt{(aa+xx+2xy)}} \\ \dfrac{xx-aa}{\sqrt{(aa+xx+2xy)}} \end{matrix}$$

Omnes quidem jam lineas noſtras denominavimus, ita tamen ut data recta $\beta\epsilon = b$ omnino non adhibita neque uſurpata fuerit, hanc ergo ut etiam adhibeamus, æquationem noſtram formabimus, atque petemus à Triangulis $\varepsilon\beta\epsilon$, & $\alpha\gamma\varepsilon$, quæ quidem ſimilia eſſe oportet, quandoquidem eſt $\alpha\gamma\epsilon\beta$ Quadrilaterum, quod eſſet inſcriptum ſemicirculo, qui ſupra diametro $\alpha\gamma$ foret deſcriptus, ob angulos rectos $\alpha\beta\gamma$; $\alpha\epsilon\gamma$; dabunt itaque Triangula ſimilia $\varepsilon\gamma\alpha$; $\varepsilon\beta\epsilon$ hancce analogiam.

$$\overset{\gamma\varepsilon}{\sqrt{(aa+xx-2xy)}} \,.\, \overset{\gamma\alpha}{2x} \,::\, \overset{\beta\varepsilon}{\frac{aa-xx}{\sqrt{(aa+xx+2xy)}}} \,.\, \overset{\beta\epsilon}{b}; \text{ unde } \frac{2aax-2x^3}{\sqrt{(aa+xx+2xy)}} = b\sqrt{(a^2+x^2-2xy)}$$

ſive $2aax-2x^3 = b\sqrt{(a^4+2aaxx+x^4-4xxyy)}$ atque hinc erit

 $4a^4x^2$

$4a^4x^2 - 8a^2x^4 + 4x^6 = a^4bb + 2a^2b^2x^2 + b^2x^4 - 4b^2x^2y^2$ & inde habemus $yy =$

$$\frac{a^4b^2 + 2a^2b^2c^2 + b^2x^4 - 4a^4x^2 + 8a^2x^4 - 4x^6}{4bbxx}$$

Cumque jam propoſitis omnibus Problematis conditionibus ſit ſatisfactum, nec plures ſuperſint adimplendæ, inde patet incognitam x eliminari non poſſe, proindeque hoc Problema linqui indeterminatum. Interim tamen, ab ipſa Problematis natura, & ex ſola harum Figurarum inſpectione facile percipientur, quos intra limites arbitrariam quantitatem x aſſumere liceat; Etenim illico patet, ipſam x ſive $\alpha\eta$ ſemper debere eſſe majorem quam $\frac{1}{2}$ $\beta\epsilon$; Cum enim $\alpha\gamma\epsilon\beta$ ſit Quadrilaterum inſcriptum ſemicirculo ſupra diametro $\alpha\gamma$ deſcripto, luculenter conſtat, hanc diametrum $\alpha\gamma$ ſeu $2x$ excedere cordam $\beta\epsilon$ ſive b; ac proinde etiam x ſuperare $\frac{1}{2}$ $\beta\epsilon$ ſeu $\frac{1}{2}$ b. Præterea vero, ex hiſce figuris etiam facile percipitur, quod ubi data $\epsilon\eta$ ſive Z & longe major quam $\beta\epsilon$ ſive b ut hic in Fig. 11. tum angulum ϵ oppoſitum ipſi $\beta\epsilon$ ſive etiam ipſi $\alpha\gamma$ fore acutum, proindeque ipſam x ſeu $\alpha\eta$ aut $\beta\eta$ aſſumi debere minorem quam $\epsilon\eta$ ſive Z aut a. Si contra, ut in Fig. 14. data $\eta\epsilon$ ſive a eſſet minor quam data $\beta\epsilon$, indicio eſſet, angulum illum ϵ fore obtuſum, atque tum ipſam x ſive $\beta\eta$ vel $\alpha\eta$ aſſumendam eſſe majorem quam $\epsilon\eta$ ſive a. Quod ſi ille angulus ϵ prope accederet ad rectum, tum non ſolum perquam parva foret data $\beta\epsilon$, ſed & ipſa x ſeu $\beta\eta$ tum aſſumenda erit paulo major quam a ſeu $\epsilon\eta$, ſi ſit acutus.

acutus. Poſtremo liquet, quod cum fuerit rectus ille angulus ε, tum plane evanituram eſſe ipſam $\beta \mathfrak{S}$, atque tria puncta β; ε; $\mathfrak{S}$, eſſe in unicum coalitura, unde conſtat, pro reſponſo tum haberi poſſe Triangula Rectangula innumera, quæ ſingula pro hypothenuſa haberent $2a$; quæque ſingula etiam recti ſui anguli verticem haberent in dato puncto β.

Hinc vero jam ſequitur, quod poſt aſſumtam indeterminatam x, debeat pro ſolutione hujus Problematis conſtrui ſaltem hæc æquatio; $yy =$

$$\frac{a^4 b^2 + 2a^2 b^2 x^2 + b^2 x^4 - 4a^4 x^2 + 8a^2 x^4 - 4x^6}{4bbxx}$$

ſive, quod idem eſt; $yy =$

$$\frac{(aab + bxx + 2aax - 2x^3) \times (aab + bxx - 2aax + 2x^3)}{4bbxx}$$

At vero, illud hic eſſe effectum, ſi cernere cui ſit volupe, reſumendo quæ ſuperius fuere præſcripta, ſic facile patebit noſtræ.

Conſtructionis Demonſtratio.

Poſt deſcriptum in Fig. 11. circulum, radio arbitrariæ x ſive $\beta\eta$, & ductis in Fig. 12 normalibus OP, EQ, factæ ſunt ibi AB $= x$; AD $= a$ ſive Z; AC $= b$ ſeu $\beta\mathfrak{S}$, & ducta BD, ipſi per C ducta eſt parallela CE; eſt ergo analogia, $\underset{x}{AB} . \underset{a}{AD} :: \underset{b}{AC} . AE = \frac{ab}{x}$ quam brevitatis ergo vocemus f, unde erit $fx = ab$; adeoque etiam $aab = afx$, qui terminus afx ſi pro aab ſubſtituatur in æquatione conſtruenda

$yy = \frac{(aab + bxx + 2aax - 2x^3) \times (aab + bxx - 2aax + 2x^3)}{4bbxx}$ evadet hæc $yy = \frac{(af + bx + 2aa - 2xx) \times (af + bx - 2aa + 2xx)}{4bb}$ ſeu extrahendo utrinq., hæcce; $\frac{\sqrt{(af + bx + 2aa - 2xx)} \times \sqrt{(af + bx - 2aa + 2xx)}}{2b}$ $= y$ ſeu $\eta\delta$ in Fig. 11. Jam vero, diametro AE $= f$ deſcripto ſemicirculo, erecta eſt in extremitate D rectæ AD $= a$ normalis DG & centro A, radio AG factus arcus GJ, unde AJ æqualis AG, at AG ſic exiſtente media proportionali inter AE $= f$ & AD $= a$ eſſet AG^2 vel $AJ^2 = af$; Similiter, diametro AC $= b$, deſcripto ſemicirculo, & in extremitate B rectæ AB $= x$ erecta normali BF, centro A, radio AF factus arcus FH; unde AH $=$ AF; at ſic, exiſtente AF media proportionali inter AB $= x$ & AC $= b$; eſſet ergo AF^2 vel $AH^2 = bx$; & modo erat $AJ^2 = af$, unde jam, ſi ducta foret JH; eſſet $JH^2 = af + bx$.

De hinc, cum duabus AB $= x$; AD $= a$ centro B, radio AD facta eſt ſectio in K, unde AK^2 valeret $aa - xx$; Porro ipſi AK ſumta æqualis AL, & diſtantia e K in L translata eſt in AM, unde KL^2 ſeu AM^2 jam valeret $2aa - 2xx$. Porro intervallo ex J in H, & centro M facta eſt ſectio in N; Sed vidimus jam JH^2 valere $af + bx$; & modo etiam AM^2 valere $2aa - 2xx$, unde ſi ducta eſſet MN, quæ deſumta ab JH, ob AN^2 æquale $MN^2 - MA^2$ eſſet $AN^2 = af + bx - 2aa + 2xx$ ſeu AN $= \sqrt{(af + bx - 2aa + 2xx)}$. Porro idem intervallum JH etiam ex A in P translatum & diſtan-

diſtantiæ M ad P æqualis facta eſt AQ. Erat autem $af+bx = JH^2$ id eſt AP^2, ut & $AM^2 = 2aa-2xx$; unde ſi ducta eſſet MP, cui æqualis AQ, tum foret $AP^2 + AM^2$ æquale MP^2 ſive AQ^2, hoc eſt $AQ^2 = af+bx+2aa-2xx$, ſeu $AQ = \surd(af+bx+2aa-2xx)$. Poſtmodum facta CO æquali CA ſive b, ducta eſt OQ, eique per N parallela facta NR, unde analogia erit

$$\overset{AO}{2b} \cdot \overset{AQ}{\surd(af+bx+2aa-2xx)} :: \overset{AN}{\surd(af+bx-2aa+2xx)} \cdot AR$$

quæ proinde erit $\frac{\surd(af+bx+2aa-2xx) \times \surd(af+bx-2aa+2xx)}{2b}$ æquale y ſive $\eta\delta$ in Fig. II. atque hæc erat conſtruenda æquatio. Tandem centro R radio $AD = a$ facta fuit ſectio in S, adeoque AS^2 valeret $aa-yy$; & facta eſt TR æqualis AB ſive x, unde eſt $AT = x+y$, & ſi ducta eſſet TS, foret itaque $TS^2 = AT^2 + AS^2$ ideſt $aa+xx+2xy$, adeoque $TS = \surd(aa+xx+2xy)$; Sed & huic diſtantiæ T ad S fuit ſumta æqualis AV, & ducta VK in hanc normalis eſt facta WK, prætereaque ſupra patuit AK^2 valere $aa-xx$; unde hæc jam erit analogia.

$$\overset{AV}{\surd(aa+xx+2xy)} \cdot \overset{AK}{\surd(aa-xx)} :: \overset{AK}{\surd(aa-xx)} \cdot AW$$ quæ

proinde eſt $\frac{aa-xx}{\surd(aa+xx+2xy)}$. Sed hancce quantitatem Analyſis nos ſupra docuerat valere in Fig. II. ipſam $\epsilon\beta$. Quod cum ita ſit, reliqua patent quæ Conſtructio facienda præſcripſit,

pſit, ſcilicet, ut in Fig. II. centro β intervallo hujus AW fieret arcus in ϵ, & centro η, radio $\eta\epsilon$ æquali a vel fieret ſectio in ϵ, à qua ſectione ϵ binæ rectæ per puncta β & δ ad circulum usque in α & γ productæ $\epsilon\alpha$ & $\epsilon\gamma$, quæſitum darent Triangulum $\alpha\gamma\epsilon$, unde omnia liquent. Q. E. D.

Geometricorum Problematum agmen hac vice claudetur per Problema non de Triangulo agens, ſed de Quadrilatero; ſit itaque hæcce ſequens.

Propoſitio 21. Problema. Fig. 10.

Conſtruere Trapezium, ſive Quadrilaterum bina habens parallela latera, cujus binæ diagonales æquentur datis duabis rectis R & S, & bini anguli parallelorum laterum alteri adjacentes, æquentur datis binis angulis. P & Q.

Conſtructio.

In directum poſitæ ſint datæ rectæ R & S in AE & EB vel ſi mavis, ne figura in nimium excurrat ſpatium, ſint AE, EB datarum R & S partes quævis æquemultiplices, v. g. $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3}$ &c. & in quavis extremitate rectæ AB anguli fiant datis æquales, nimirum BAH ipſi P, & ABH ipſi Q, ſi datorum angulorum ſumma ſit ſemicirculo minor, ſin autem major ſit, faciendi erunt anguli BAH, ABH æquales datorum angulorum complementis ad duos rectos. Ex O medio puncto ipſius AB recta ducatur OH. Tum in rectæ AB extremitate illa A, ubi eſt datorum angulorum minor P, fiat ad partem Triangulo ABH oppoſitam angulus quivis acutus BAC, ibique AC æqualis ſit AE, atque CD æqualis

qualis EB, & ducta DB, ipſi per C parallela agatur CF; tunc ſupra EF tanquam diametro deſcribatur centro G ſemicirculus, qui ſi rectæ OH non occurrat, Problema erit impoſſibile, hanc ſi tangat, habebit Problema ſolutionem unicam, illam vero ſi, ut hic, in duobns punctis J & i ſecet, admittet Problema binas ſolutiones. Etenim, per puncta illa J & i ducantur indefinitæ rectæ AJ & A i, ponanturque in illis major data S in AN & An, ac per N & n ducantur ipſis BA & BH parallelæ NM, NP, ut & n m; n p; utrumvis Trapezium APNM & A p n m quæſito ſatisfaciet, nam habebit tam propoſitas diagonales, quam propoſitos etiam angulos.

Priusquam manum de tabula, duorum Problematum numericorum ſolutiones Algebraïcas tranſcendentes tradere viſum eſt, quorum alterum determinati generis eſt alterum indeterminati, quasque Lectori Mathematico haud ingratas fore confidimus.

Propoſito 22. Problema.

Invenire numeros in Progreſſione Arithmetica, quorum numerus terminorum datus ſit n, *&* *productum termini penultimi per ſummam omnium præcedentium ſit data quantitas* a : *ſed productum ultimi per ſummam terminorum ſe præcedentium totidem* n—2 *ſit data quantitas* b.

Solutio.

Si numerus n ſit par, ponamus binos terminos Progreſſionis Arithmeticæ intermedios incognitos, eſſe vocatos $x - y$

&

& $x+y$. Si vero numerus n ſit impar, tum ponamus tres terminos intermedios incognitos eſſe vocatos; $x-y$; y & $x+y$; tum dico fore ſemper

$$x = \sqrt{\frac{(n-1)^2 a - b(nn-2n-7)}{4.(n+1).(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-1)^2 a - b(nn-2n-7)}{4.(n+1).(n-2)}\right)^2 + \frac{(n-3)\,bb}{(n+1).(n-2).(n-2)}}}$$

Sed ſemi differentiam Progreſſionis eſſe ſemper $\frac{b - xx.(n-2)}{(n-1).(n-2)x}$ quæ ergo valebit y, ſi n ſit numerus par; ſed $\frac{1}{2}\,y$ ſi n eſt impar. His autem cognitis, reliqua facile innoteſcunt, quippe cum ſit manifeſtum, quod in caſu primo, cognitis binis terminis mediis $x-y$; $x+y$ ignorari non poſſint horum vicini $x-2y$ & $x+2y$ nec non horum vicini $x-3y$ & $x+3y$ &c. Similiter in ſecundo caſu, cognitis tribus hiſce intermediis $x-y.x.\,x+y$, & horum vicini noti erunt etiam, $x-2y$; $x+2y$; ut & horum vicini $x-3y$; $x+3y$ &c.

Exemplum 1um.

Quæritur Progreſſio Arithmetica 8 terminorum, in qua productum termini penultimi per ſummam ſuorum 6 terminorum præcedentium ſit 2610; ſed productum termini ultimi per ſummam ſuorum itidem 6 terminorum præcedentium ſit 3762.

Cum hic ſit $n = 8$ evadet itaque hæcce expreſſio valoris x talis. $\sqrt{\frac{49a-41b}{216} + \sqrt{\left(\frac{49a-41b}{216}\right)^2 + \frac{5}{324}bb}}$. Unde igitur hæc jam formula valoris x erit pro omnibus exemplis, ubi quæritur Progreſſio 8 terminorum. Ponendo itaque

que hic 2610 loco a; & 3762 loco b, habemus $\frac{49a - 41b}{216}$ $= \frac{127890 - 154242}{216}$ ſive $- \frac{26352}{216}$ id eſt $- 122$; Hujus ergo $- 122$ quadratum 14884 eſt ſumendum, ut primum membrum habeamus ejus, quod ſub hoc ſigno

$\sqrt{\left(\frac{49a - 41b}{216}\right)^2 + \frac{5}{324}bb}$. De hinc, quoad terminum

$\frac{5}{324}bb$, ipſe eſt productum ipſius $\frac{1}{9}b$ per $\frac{5}{36}b$; Sed $\frac{1}{9}b =$ 418, & $\frac{5}{36}b$ æquatur $\frac{18810}{36}$ ſive $\frac{1045}{2}$. At productum ipſius 418 per $\frac{1045}{2}$ eſt 218405; huic ergo addendo 14884, habemus 233289 pro valore ipſius $\left(\frac{49a - 41b}{216}\right)^2 + \frac{5}{342}bb$, ex quo radicem quadratam extrahendo, illa eſt 483. Huic ergo radici addendo $\frac{49a - 41b}{216}$ quod erat $- 122$, in totum ergo habemus $483 - 122$ ſive 361, cujus denique rurſus radix quadrata eſt extrahenda, atque ſic obtinemus $19 = x$. Poſtmodum eſt hic $\frac{b - xx\,(n-2)}{(n-1)(n-2)x}$ æquale $\frac{b - 6xx}{42x}$ vel $\frac{3762 - 6 \times 361}{42 \times 19}$ id eſt $\frac{3762 - 2166}{798}$ ſive $\frac{1596}{798} = 2$, quare hic,

ubi

ubi n eſt numerus par, valet y numerum 2. Cum itaque ſit jam $x = 19$ & $y = 2$, ſolutio erit

$$\begin{array}{cccccccc} x-7y & x-5y & x-3y & x-y & x+y & x+3y & x+5y & x+7y \\ \div\ 5 & 9 & 13 & 17 & 21 & 25 & 29 & 33 \end{array}$$

Exemplum 2.

Quæritur Progreſſio Arithmetica terminorum 11, talis ut productum penultimi termini per ſummam omnium 9 præcedentium ſit $5278\frac{1}{2}$, & ut productum ultimi per ſummam ſuorum itidem 9 præcedentium terminorum ſit 7011.

Hic ergo ubi $n = 11$ fiet valor $x = \sqrt{\frac{25a-23b}{-108} + \sqrt{\left(\frac{25a-23b}{108}\right)^2 + \frac{2}{243}bb}}$

& hæc itaque jam eſt formula valoris x pro omnibus exemplis ubi quæritur Progreſſio 11 terminorum. Hic itaque ponendo $5278\frac{1}{2}$ loco a, & 7011 loco b fiet $\frac{25a-23b}{108} = \frac{131962\frac{1}{2} - 161253}{108}$ ſive $-\frac{58581}{216}$. Hujus ergo quadratum, ſcilicet $\frac{3431733561}{46656}$ erit primum membrum ejus quod ſub ſigno $\sqrt{\left(\frac{25a-23b}{108}\right)^2 + \frac{2}{243}bb}$

Deinde, quoad terminum $\frac{2}{243}bb$; ipſe eſt productum $\frac{2}{9}$ b in $\frac{1}{27}$ b. Sed $\frac{2}{9}$ b eſt 1558; & $\frac{1}{27}$ b eſt $\frac{7011}{27}$; atque productum ex 1558 in $\frac{7011}{27}$ eſt $\frac{10923138}{27}$; Iſthuc autem, quod eſt $\frac{2}{243}bb$ cum addi debeat ipſi $\frac{3431733561}{46656}$, ut hic denom. 27

æque-

æquetur alteri 46656, uterque fractionis $\frac{10923138}{27}$ terminus ducendus erit in 1728, & tum evadet hæc fractio $\frac{18875182464}{46656}$, quæ nunc addita ipſi $\frac{3431733561}{46656}$ dabit, $\frac{22306916025}{46656}$ cujus jam radix quadrata ſumenda eſt. Sed illa radix eſt, $\frac{149355}{216}$. Huic ergo rurſus addi debet $\frac{25a-23b}{108}$ quod erat $-\frac{58581}{216}$ quod ergo dabit $\frac{90774}{216}$ ſive $\frac{15129}{36}$. Denique & hinc radix □ta extrahenda rurſus; Hæc autem reperitur $\frac{123}{6}$ ſeu $\frac{41}{2}$ hoc $20\frac{1}{2}$ pro x. Poſtmodum ſemi - differentia Progreſſionis $\frac{b-xx(n-2)}{(n-1).(n-2)x}$ quæ hic valet $\frac{1}{2}y$, quia $n = 11$ eſt numerus impar, erit $\frac{b-9xx}{90x}$ ſive $\frac{7011-9 \times \frac{1681}{4}}{45 \times 41} = \frac{12915}{7380}$ id eſt $\frac{7}{4} = \frac{1}{2}y$. Cum itaque differentia y ſit $\frac{7}{2}$ & x ſit $20\frac{1}{2}$, ſolutio erit

$x-5y$	$x-4y$	$x-3y$	$x-2y$	$x-y$	x	$x+y$	$x+2y$	$x+3y$	$x+4y$	$x+5y$
$\div 3$	$6\frac{1}{2}$	10	$13\frac{1}{2}$	17	$20\frac{1}{2}$	24	$27\frac{1}{2}$	31	$34\frac{1}{2}$	38

Propoſitio 23 Problema.

Quæritur Progreſſio Arithmetica, cujus datus ſit numerus terminorum n; *differentia* d; *& cujus ſumma Progreſſionis ſit numerus quadratus.*

Solutio.

Solutio.

Problema hocce eſt indeterminatum; Etenim cum datis quantitatibus n & d formetur ſemper quantitas $b = \frac{nnd - nd}{2}$ & cum quantitate ad lubitum aſſumta c formetur ſemper $x = \frac{b - cc}{2cn}$; ubi patet, quod pro c ergo liceat numerum aſſumere quemvis, dummodo ejus quadratum cc ſit minus quam b. Hoc facto, primus terminus ſit ſemper nxx, & aſcendatur cum differentia d ad datum terminorum numerum n; Dico factum, & quæſtionem eſſe infinite ſolutam, ſive reſponſa huic quæſtioni poſſe dari innumera.

Exemplum I.

Quæritur Progreſſio Arithmetica quatuor terminorum, quorum differentia ſit $4\frac{1}{2}$; *& ſumma Progreſſionis ſit numerus quadratus.*

Hic cum ſit $n = 4$ & $d = 4\frac{1}{2}$ fiet b ſive $\frac{nnd - nd}{2} = 27$ atque x ſive $\frac{b - cc}{2cn}$ erit $\frac{27 - cc}{8c}$. Jam ergo ſit ſumta indeterminata quantitas $c = 1$; tum erit x ſeu $\frac{27 - cc}{8c} = \frac{13}{4}$ atque hinc 1mus Progreſſionis terminus nxx erit $\frac{169}{4}$ ſive $42\frac{1}{4}$, & aſcendendo hinc ad terminos 4 cum differentia $4\frac{1}{2}$; erit ſolutio $\div$ $42\frac{1}{4}$. $46\frac{3}{4}$. $51\frac{1}{4}$. $55\frac{3}{4}$ cujus ſumma 196 eſt utique numerus quadratus.

Sit

Sit ſumta $c = 5$ tunc fiet x ſeu $\frac{27 - cc}{8c} = \frac{1}{20}$ ac primus terminus nxx erit $\frac{1}{100}$; atque ſolutio eſſet $\div \frac{1}{100}$: $4\frac{51}{100} \cdot 9\frac{1}{100} \cdot 13\frac{51}{100}$ cujus ſumma $27\frac{1}{25}$ eſt utique quadratum; ſcilicet ipſius $5\frac{1}{5}$.

Exemplum 2.

Quæritur Progreſſio Arithmetica 5 terminorum, quorum differentia ſit 3, & ſumma Progreſſionis ſit quadratum.

Hic eſt $n = 5$; $d = 3$, unde b ſeu $\frac{nnd - nd}{2} = 30$; atque x ſeu $\frac{b - cc}{2cn}$ erit $\frac{30 - cc}{10c}$; Jam ponatur $c = 1$ & erit x ſeu $\frac{30 - cc}{10c} = \frac{29}{10}$ unde nxx erit $\frac{841}{20}$ ſive $42\frac{1}{20}$, & hinc pergendum ad 5 terminos, cum differentia 3; atque erit ſolutio $\div 42\frac{1}{20} \cdot 45\frac{1}{20} \cdot 48\frac{1}{20} \cdot 51\frac{1}{20} \cdot 54\frac{1}{20}$ cujus ſumma $240\frac{1}{4}$ eſt quadratum numeri $15\frac{1}{2}$.

Ponatur $c = 5$ tum erit x ſeu $\frac{30 - cc}{10c} = \frac{1}{10}$ unde primus terminus nxx fiet $\frac{1}{20}$; & hinc pergendo ad terminos quinque per differentiam 3 erit ſolutio $\div \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{20} \cdot 6\frac{1}{20} \cdot 9\frac{1}{20} \cdot 12\frac{1}{20}$ cujus ſumma $30\frac{1}{4}$ utique eſt quadratum; ſcilicet numeri $5\frac{1}{2}$.

Ponatur $c = 3\frac{2}{5}$ tum erit x ſeu $\frac{30 - cc}{10c} = \frac{461}{850}$ unde primus terminus nxx erit $\frac{212521}{144500}$ ſeu $1\frac{68021}{144500}$; & hinc aſcendendo ad terminos 5 per differentiam 3, ſolutio reperietur $\div 1\frac{68021}{144500} \cdot 4\frac{68021}{144500} \cdot 7\frac{68021}{144500} \cdot 10\frac{68021}{144500} \cdot 13\frac{68021}{144500}$ cujus ſumma $37\frac{10221}{28900}$ eſt utique quadratum; ſcilicet numeri $6\frac{19}{170}$, unde patet, ejusdem Exempli hujus reſponſa poſſe haberi innumera.

Methodus generalis inveniendi Catenarias

per JOH. BAPT. CLAIRAUT.

Lemma I.

Tab. IV. fig. 1. SI tres potentiæ Q, R, S ſint in æquilibrio, & directio virium QA, RA, SA: Dico has tres potentias inter ſe fore, uti ſinus angulorum SAR, QAS, QAR.

Dem.

Conficiatur parallelogrammum CABD, cujus latera parallela ſint directionibus QA, AR, & diagonalis AD ſit in directione AS. Perſpicuum eſt, tres vires Q, R, S exprimi per tria latera, CA, AB = CD, & AD. Atqui hæc tria latera ſunt inter ſe uti ſinus angulorum oppoſitorum. Quare conſtat propoſitum.

Dem.

Tabula IV. pag. 270.

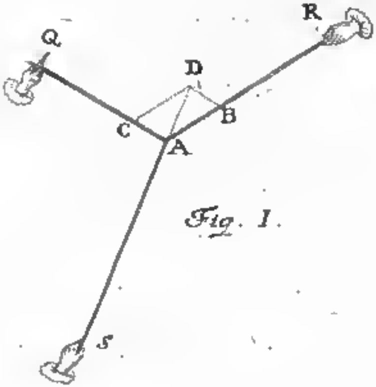


Fig. I.

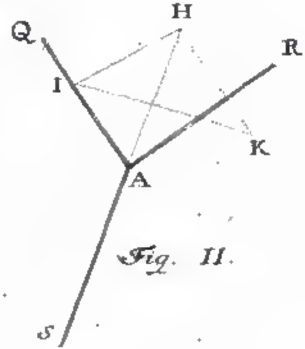


Fig. II.

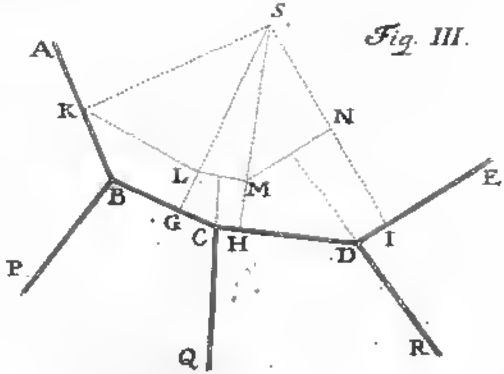


Fig. III.

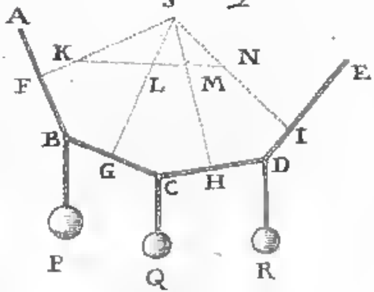


Fig. IV.

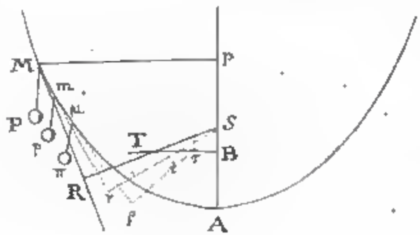


Fig. V.

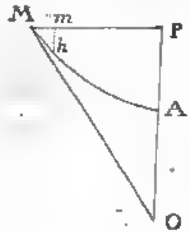


Fig. VI.

Lemma II.

Poſitis iisdem, ut in propoſitione præcedente, ſi fiat triangu- *Fig. 2.* lum HJK, cujus tria latera ſint directionibus QA, AR, AS, perpendicularia: Dico tria latera hujus Trianguli eſſe proportionalia viribus, quarum directiones ſint his lateribus perpendiculares.

Dem.

Triangulum HJK eſt ſimile triangulo ACD. Quare conſtat propoſ.

Lemma III.

Sit ABCDE chorda, quæ ſuis extremitatibus affigatur pun- *Fig. 3.* ctis A & E; ſint porro hujus chordæ punctis B, C, D applicatæ vires P, Q, R. Si chorda ABCDE cum chordis BP, CQ, DR, per quas potentiæ P, Q, R operantur, in æquilibrium reducatur, atque ex puncto quocunque S ad chordæ ABCDE partes AB, BC, CD, DE ducantur perpendiculares SK, SG, SH, SJ & puncto K vel quocunque alio lineæ SK ducantur rectæ KL, LM, MN perpendiculares directionibus chordarum BP, CQ, DR; Dico, tenſiones chordarum, BP, CD, PR, hoc eſt vires P, Q, R exprimi per rectas KL, LM, MN: rectæ vero KS, LS, SM, SN exprimenttenſiones partium chordarum AB, BC, CD, DE. Demonſtratio eſt eadem cum anteced.

Cor.

Ponamus chordam AE affixam in A & E, & oneratam pon- *Fig. 4.* deribus P, Q, R; Si ex puncto quocunque S ad chordæ AE partes AB, BC, CD, DE demittantur perpendiculares SF, SG, SH,

SJ,

SJ,, & ducatur recta horizontalis quæcunque KN: Dico partes KL, LM, MN eſſe in eadem ratione, quam tenent inter ſe pondera, P, Q, R.

Problema.

Fig. 5. Invenire curvam, quam format filum ſuſpenſum in duobus punctis datis, poſito craſſitiem hujus fili variari ab una extremitate ad alteram ſecundum legem quamcunque, vel quod eodem recidit, ponendo, hujus fili punctum quodvis M oneratum eſſe ponduſculo P, quod exprimatur per functionem quamcunque tangentis AM.

Solutio.

Ex puncto quocunque S ad tangentes MR, mr, $\mu\,\varrho$ &c. catenariæ demittantur perpendiculares SR, Sr, $S\varrho$, & ducatur recta quæcunque horizontalis BT, partes Tt, $t\tau$ erunt proportionales ponderibus ſuſpenſis in M & m. Ponamus nunc craſſitiem fili catenariæ in M exprimi per functionem quamcunque S arcus AM; pondus P, quo onerari filum ponimus in M erit S × Mm, vel S d s. Ergo Tt erit proportionalis cum Sds. Ergo & recta BT erit proportionalis cum ſ. Sds. Atqui BT eſt tangens anguli TSB = PMR, proprietas curvæ quæſitæ igitur poteſt ita exprimi: tangens anguli PMR eſt proportionalis functioni arcus expreſſæ per ſ. Sds. Inde æquatio curvæ quæſitæ erit $\frac{dy}{dx}$ = ſ. Sds. ponendo AP = x, PM = y.

Fig. 6. Inde intelligitur, data æquatione hujus naturæ, facile conſtrui curvam, ſi valor S detur per s.

Pars Secunda.

PARS SECUNDA

CONTINENS

PHYSICA.

Num. I.

D. J. H. POTT

Methodus deſtillandi & dephlegmandi beneficio caloris Solaris.

§. I.

EQvidem hæc Methodus certo reſpectu non plane nova, ſed potius omnium antiqviſſima exiſtit, nihilominus negari neqvit, eam ipſam omnium pauciſſime in uſum vocatam, & ulterius expolitam fuiſſe, quamvis eam Natura ab orbe condito in hunc usque diem conſtantiſſime exercuerit, & qvamdiu ſyſtema hoc duraturum eſt, absque interruptione continuabit. Cui enim ignotum eſſe poterit, a primordio usque per calorem Solis varii generis humores globi hujus terraqvei expandi & ſubtiliores reddi, indeqve in altum elevari,

qvi vero poſtmodum a frigore denuo condenſati, vel ad latera alliſi, rurſus condenſantur, denuo coeunt, & per guttas decidunt. Non improbabile eſt, primævos Naturæ ſcrutatores ex hoc phænomeno anſam nactos eſſe, id poſtmodum per artificioſam vaſorum posituram & applicationem caloris imitandi & excolendi: unde deſtillatio cum diverſis ſuis ſpeciebus ortum traxit. Qvamvis autem per artificioſam hanc deſtillationis naturalis imitationem admirandus omnino numerus diverſorum productorum provenerir, eaqve omni jure jugiter continuetur; attamen nec inutile fuiſſet ſimpliciorem Naturæ methodum ſimul conſervaſſe, eiqve levi arte in ſubſidium veniſſe.

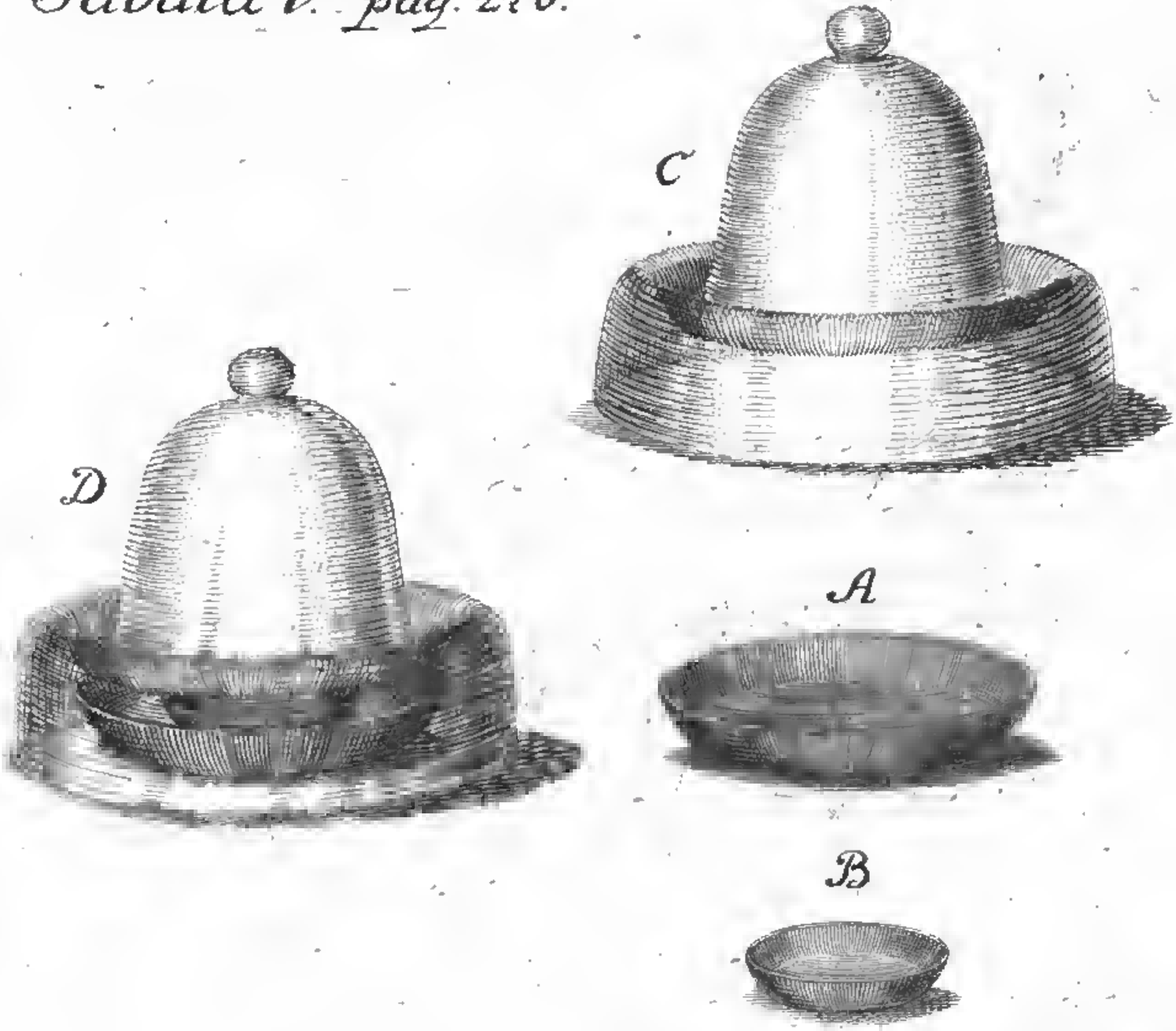
Proinde exiſtimo Philochymicis non plane diſpliciturum eſſe, qvod pro hoc fine aliqvam manuductionem iis ſuppeditaverim, commonſtrando, qva via pro aſſeqvendo hoc fine hactenus qvædam experimenta inſtituerim, quæ poſtea ab iis facile ulterius extendi & magis perfici poterunt; dum nullus dubito, qvod exinde partim pro laboribus qvibusdam commodius inſtituendis, partim accuratius examinandis uſus aliqvis redundaturus ſit.

§. II.

Tab. V. Recipitur nempe patina vitrea, vel melius ex porcellana vulgari, imo qvavis argilla bene tamen vitreata parata e. g. ſub. A. magnitudinis arbitrariæ, huic imponitur alius longo minor catinus vitreus ſub. figura B., & qvidem huic poſteriori immittitur materia illa, quæ deſtillationi ſubjici debet, utrumqve vas

poſt

Tabula V. pag. 276.



Friſch ſc.

poſtmodo contegitur campana vitrea ſub C. ita conſtructa, ut circumcirca profundo margine inſtructa ſit, qvi in primam patinam dehiſcat vel defluat, non vero in catinum, vaſa hac ratione compoſita ſuper commodo aſſere calori Solari exponuntur, ut ſub. D; ita enim liqvidum in catino B. exiſtens a calore hoc ſubtiliſatur, in altum evehitur, ibiqve ad latera campanæ condenſatur, in guttas coit, & ſic in pateram Porcellanicam A. defluit, adeoque in hac patera liqvor deſtillatus reperitur, qvi ſeorſim effundi poteſt: in Catino B. vero reſtat Terra reſidua vel Sal, vel acidum concentratius, vel oleum dephlegmatum &c.

§. III.

Non incongruum erit ſpeciales qvasdam hac methodo inſtitutas probas in medium proferre. Reperiuntur nonnulli curioſorum, qvi omnem ignis culinaris calorem pro infallibili teneriorum formarum deſtructore reputant, qvo concretorum partes ſubtiliſſimæ turbentur, confundantur, & ſubtiliſſimum movens ejiciatur, vel peſſumdetur, ii certe methodum hanc noſtram laboribus ſuis applicare poterunt, an forte hac ratione propinqvius & commodius ſcopum ſuum aſſeqvi posſint. E. g. Qvod ſi aqva pluvia, ros majalis, coelifolium, pluvia tonitrualis, pruina, &c. examini & ſeparationi ſubjicienda ſint, noſtra methodus perqvam commode in uſum trahi poterit: quippe hac ratione egregie ſeparatur pars ſubtilior & magis phlegmatica, ita ut maſſa oleaginoſo ſalina roris, pluviæ &c. in Catino B. reſtet, adeoqve utrumqve ſeorſim

ſim colligi poteſt, &, ſi placet, maſſa hæc Salina repetita in eadem aqva ſolutione filtratione, & in Sole coagulatione qvam optime depurari, ſic reſtat qvaſi flavum Salinum Gummi, qvod poſtea facile ulterius examinari, & qvavis ratione disjungi poterit: Lympha iſta qvæ ex patina porcellanica colligitur, ſiſtit valde puram & ſubtilem aqvam, qvæ pro intimiori depuratione aliorum Salium cum fructu applicari poteſt, dum aqva hæc ſic ſatis homogenea eſt, licet non abſolute: nam reticere non poſſum, qvod calor Solis non ſolum partes volatiles & phlegma attrahat, verum etiam qvasdam partes medias pingves & Salinas ſimul evehat. Cum enim aliqvando hanc externo aſpectu adeo ſimplicem aqvam denuo per ſe absque ulla additione ex Balneo Mariæ igne leniſſimo deſtillarem, reſtabat in fundo cucurbitæ contra omnem exſpectationem adhuc qvædam licet valde exigua portio Salis cujusdam perqvam ignei, qvod certe dummodo in majori copia parari poſſet, ulteriore inqviſitione perqvam dignum videtur.

§. IV.

Accuratiores Chymici qvantum operæ impendant, ut acetum deſtillatum perqvam concentratum pro ſolutionibus ſuis nanciſcentur (qvippe quod pro non paucis operationibus maxime neceſſarium eſt) non adeo ignotum eſt: Huc enim pertinent præcipue Spiritus æruginis ſimplex, vel compoſitus dictus, Spiritus Sacchari Saturnini, Spiritus ex Terra foliata Tartari mediante oleo Vitrioli paratus, concentra-

tio

tio aceti deſtillati per Vitriolum Martis calcinatum, qvam Stahlius noſter inſinuavit, (qvæ tamen ſuis etiam difficultatibus premitur) & ab eodem commendata concentratio aceti per frigus: qvæ qvidem eximia eſt; ſed cum ea non omni tempore imo nec omnibus annis ob deficientem frigoris gradum inſtitui poſſit; Hinc non incommode concentratio ejus in Sole menſibus æſtivis ſubſtitui, vel etiam hac perfici poteſt: qvamvis non negandum, hoc modo etiam non paucas partes acidas ſimul elevari, qvod guſtus monſtrat: qvin &, ſi nimis diu continuetur, omne acidum aſcendit reſtante parte pingviore ſeu oleoſa. Imo etiam pro dephlegmandis aliis Spiritibus corroſivis Salis, Nitri, Vitrioli &c. inſervire poteſt, ubiqve tamen liqvor tranſtillans adhuc acidus reperitur, præſertim calore Solis nimis fervido exiſtente.

§. V.

Ex prædictis facile concludi poteſt, aqvas mediæ volatilitatis ſatis commode methodo noſtra deſtillari poſſe, qvorſum etiam aceta diaphoretica & vulneraria accenſeo: Sic & ea concreta qvæ ſub deſtillatione facile cum ſpumeſcentia tranſcendunt, commode in vaſibus noſtris tractantur; & Sperma ranarum ſuppeditat aqvam in ſuo genere neqvaqvam contemnendam: itidem urina hac ratione concentrari, vel aqvoſæ ejus partes ab oleoſo Salinis non inconcinne ſeparari qveunt. Applicari qvoqve poteſt pro promovenda cryſtalliſatione ejusmodi Salium, qvæ alias difficul-

ter

ter cryſtalliſantur, ut Saccharum Saturni, cryſtalli fuſibiles urinæ, nec non pro ſeparatione Salium eorum, qvæ cum aliis oleoſis & alcalicis plane non cryſtalliſabilibus partibus commixta ſunt: Uſum quoqve habet eximium in dephlegmatione & incraſſatione oleorum tam expreſſorum qvam deſtillatorum, qvorum hæc operatione iſta tanto aptiora & potentiora evadunt ad ſolvendum reſinas difficiliores pro verniſiis &c. In genere autem multum & operæ & impenſarum parcitur operatione noſtra verſus communes deſtillandi methodos, dum absqve carbonibus qvaſi ſatis potens Balneum Mariæ ſiſtit, in qvo nullum empyreuma metuendum. Cum qvoque hic digiti a carbonibus non denigrentur, inde etiam a delicatioribus exerceri poteſt: Et, ſi copia vaſorum ita adornatorum ad manus fuerit, deſtillationes certe in ſatis notabili copia ſuccedunt. Imprimis tamen eo reſpiciendum, ut campana in fundo cum aſſere firmiter occluſa ſit: ne ventus atomos pulverulentas injicere poſſit, qvod intercipitur ſuppoſitione lanoſi panni, vel applicatione Limi aut argillæ vel alio commodo luti genere. Verum circa Spiritus volatiles Sulphureos, vinoſos, urinoſos methodus noſtra adhiberi non poteſt, ſed pro ejusmodi intentione alia vaſa diverſo modo diſponenda requirerentur; qvod etiam factu non adeo difficile fuerit, ſi opus eſſet: Facilius vero parca vaſorum immutatione methodus noſtra ad deſtillationem per deſcenſum peragendam immutari poſſet, cui rei etiam accom-

commodari poſſet delineatio, qvæ in Medico Euporiſto Hertodi p. 145. occurrit.

§. VI.

Non poſſum non hac occaſione aliam adhuc in Sole deſtillandi Methodum, licet magis limitatam, in ſcenam producere: innititur ea ſeqventibus circumſtantiis; dum materia deſtillanda communi vaſi retorto vitreo immittitur, vel etiam cucurbitæ non nimis altæ & alembico juſto inſtructæ, ſed utrobique vas recipiens, imo etiam interdum alembicus ita collocantur, ut a Sole non poſſint immediate calefieri, ſed potius partim aqvæ frigidæ immittantur, partim craſſo madido panno vel linteo contegantur, qvæ humectatio ſæpius renovanda erit, ne vas recipiens toto illo tempore incaleſcere poſſit, ubi tanto melius, ſi vas recipiens loco umbroſo contineri poſſit, cum contra materia ipſa in vaſe retorto vel cucurbita calidis Solis radiis exponitur: ita vapores materiæ a calore Solis ſubtiles redditi & elevati in recipiente frigido denuo condenſantur & coeunt: Verum hæc deſtillandi methodus tantum locum invenit, ubi ſubtiles magis Spiritus deſtillandi & capiendi ſunt; qvamvis etiam partes mediæ hac ratione ſimul transvehi poſſint, cujus rei Specimen ſupra §. 3. in rore majali, & §. 4. in aceto, Spiritu Salis &c. vidimus. Enchireſi hac non inconcinna prodeunt phænomena, ſi Terra pingvis ſiccata cum rore majali cohobando tractetur, cum partes activiores ſimul tranſvehuntur, poſthæc ſeparandæ, in qvo myſteria venantur.

§. VII.

Quod ſi vero graviores Spiritus & olea deſtillare animus eſt, tum utiqve ordinarius Solis calor vix ſufficiet; unde is multiplicatus adhiberi poteſt: fit hoc, ſi vaſibus Retortis ita, ut paragrapho præcedente 6 diximus, diſpoſitis calor Solis multiplicatus per vitrum cauſticum applicatur, qvod ita dirigendum eſſet, ut punctum ſeu focus non vas retortum, ſed medium materiæ feriat: Interim non diffiteor methodum hanc jam ab aliis licet per tranſennam adductum eſſe, dum Exc. F. Hofmannus in Notis ad Poterium p. 519. ait: *Datur alius minus notus deſtillandi modus beneficio vitri cauſtici ignem intenſiſſimum ſuppeditantis, qvando nimirum Retortæ vel phiolæ vitreæ nigro colore qvod dimidiam partem tinctæ* (papyro nigro obductæ vel pulveri carbonum immiſſæ) *ut eo melius Solares radii colligi & uniri qveant, immittitur. Maſtix Succinum, Olibanum, & capax Recipiens vitreum adhibetur, ſic in libero aere radiis Solaribus copioſum oleum & Spiritus elici poteſt.* Ex hoc poſtea qvoqve Fr. Lanis in Magiſterio Art. & Naturæ aſſerit: *Succinum deſtillari in oleum pulchrum per Speculum uſtorium;* imo etiam in Collect. Wratisl. T. XVIII. adducitur: *beneficio Speculi uſtorii Flores Herbarum in vitro ita deſtillari, ut aqva odorata prodeat.*

Qvamvis autem hæc methodus per ſe utiqve ſatis certa ſit, tamen ſuis difficultatibus non caret, qvarum præcipua eſt, qvod vas retortum ſub hac deſtillatione in parte ſuperiori a calore intenſo non raro fiſſuras concipiat, niſi ſedulo

vitrum

vitrum cauſticum ſecundum motum Solis inclinetur & dirigatur, qvo focus in eodem puncto conſtanter permanere poſſit; qvo fine non incongruum eſt directionem hanc per applicationem juſti horologii ita determinare, ut ſecundum declinationem Solis ſimul machinam vitri cauſtici inflectat. Sic quoque vaſa retorta ex porcellana vera facta pro perficiendo hoc deſtillationis genere non inepta futura eſſe facile conjicere licet. Fundus exterior vaſis, ſi pro dimidia ſui parte nigro qvodam colore inducatur, fortiori repercuſſione calorem utique adauget.

§. VIII.

Reſtant porro inqvirenda hac ratione experimenta nonnulla ſatis curioſa e. g. in Ephemerid. Nat. Cur. Centur. V. VI. aſſeritur: *Cochfolium in phiola vel mortario vitreo per ſpeculum cauſticum circulando evadere ſangvinis ad inſtar rubicundum.* Nonnulli ſingulares effectus ſpondent, ſi radii Solares mediante vitro cauſtico per longum ſatis tempus ita in oleum Vitrioli agere poſſint, ut pars ejus hac ratione ſubtiliſata avolare neqveat, ſed iterum capiatur, demum leni carbonum calore a reſiduo ſeparanda. Niſi nimium extra oleas vagarer, hujus loci eſſet præparatio pulveris iſtius rubri ex radiis Solaribus, (ut qvidem exiſtimant) de quo *Digby in Tract. de immortalitate animæ* perhibet, quod aurum ſine reductione in Tigillo diſſolvat, indeque grandia promittit; verum meus pro obtinendo hoc effectu applicatus, diverſimode quoque immutatus labor hactenus fuit irritus; unde tanto minus

 certi

certi qvidquam de eo proferre valeo. Verum Calcinationes Antimonii aliorumque metallicorum corporum per vitra cauſtica ſatis notæ ſunt, quam ut iis diutius hac vice inhærendum exiſtimem. Unde hac occaſione tantum digito commonſtrare, & pauciſſimis verbis adducere lubet, nonnullos etiam radiorum Lunarium per Specula cauſtica concentrationem curioſis commendare, & quidem Helmontius pro exſtirpandis verrucis, Welling in opere Mago Cabbaſtico promittit exinde aquam, quæ omnes morbos Lunaticos ſanet; & Dantiſci non ignotus D. Hultazob aquam lacuſtrem filtratam eadem ratione radiis Lunaribus imprægnare, indeque varia curioſa præparare fertur, & per me quidem quiſque ſuo ingenio abundet: hac vice finem imponens cum acclamatione triti iſtius: quantum eſt quod neſcimus!

Num. II.

Ejusdem

Conſiderationes circa Indolem Baſis Salis communis.

§. I.

Placuit clariſſimo Societatis Scientiarum Pariſinæ Chymico D. Du. Hamel in actis ejusdem Anni 1736. p. 215. Experimenta circa baſin Salis marini ab ipſo inſtituta Philochymis & phyſicis communicare, ex qvibus tandem concludit; qvod hæc baſis nihil aliud ſit, qvam verum Sal alcali, qvam proinde hac vice ſub examen revocare non inconſultum duxi, qva in re unicus ſcopus mihi erit veritas, cui reluctari & præjudiciis inhærere iniqvum ſemper exiſtimo: ego vero hic ea tantum, qvæ proprie huc pertinent, delibabo, omiſſis reliqvis quæ minus ad rem faciunt.

§. II.

Primum, quod hic animadverſione dignum occurrit, reperio p. 218. Nimirum: quod *ignis vehementiſſimus etiam acida mineralia non poſſit dimovere vel abigere, ſimulac ſemel cum Sale alcalino fixo unita ſint, quæ propoſitio adeo generaliter vera, ut tanqvam axioma Chymicum conſiderari poſſit, unde ſi Nitrum, Tartarus Vitriolatus, Sal Glauberi, vel Sal Marinum igni*

 acu-

acutiſſimo exponantur, ne minimum qvidem acidi veſtigium inde ſeparari. Verum, quod pace ipſius dixerim, hæc propoſitio non modo non eſt univerſalis, ſed & aperte erronea, hoc enim apertiſſime omnium dilucеſcit in exemplo Nitri, qvod ipſe ibi in medium protulit; hoc eſt acidum minerale cum Sale alcalino fixo intime combinatum; nihilominus, contra omnem hactenus receptam ſententiam, per ſe absque omni additione, multo minus acidi Vitriolici, ſolo ignis motu agitatum acidum ſuum dimittit ita, ut pars ejus Salino alcalina pura reſtet, omni acido orbata, qvod vel aufugit, vel in vaſe recipiente capitur, & hoc peragitur tam methodo fuſionis quam deſtillationis. Nam cum Nitrum per ſe deſtillatur, Spiritus ejus acidus tranſtillat, & Sal ipſius alcalinum reſtat qua purum Sal alcali, nullam amplius detonationem cum corpore inflammabili ſubiens, nec additione acidi Vitrioli Spiritum acidum dimittens; vel eadem methodo via fuſionis in auras evaporat.

§. III.

Non diffiteor, plerosque Chymicorum problema hoc paradoxum imo erroneum habituros eſſe, cum receptæ ſententiæ è diametro contrarietur, nihilominus ſatis firmum & certum eſt. Ratio, qvare Chymicorum plerique hactenus aliam opinionem foverint, in eo præcipue fundata eſt, quia in via fuſionis tigilla ipſis defuerunt conſtantia & minus poroſa, unde ordinaria Haſſiaca diutino iſto fluxu partim cum ſale alcalino in vitrum coierunt, partim vero & præcipue per

ypſen-

ypſenſia tigilla alcali transſudavit & eliquatum eſt, hinc propter inſufficientem ignem Sal illud, quod reſtitit, adhuc ſemper aliqvam portionem Nitri crudi ſecum retinuit, unde quamvis ex parte alcaliſatum fuerit, quod ipſi diffiteri nequeunt, tamen propter hanc immixtionem purum recipere non potuerunt. Eadem ratione in via deſtillationis vaſa vitrea calorem fluentis Nitri diu illæſa ſuſtinere nequiverunt, ſed vel diſrupta vel colliquata ſunt; & vaſa retorta terrea propter majorem poroſitatem Nitrum vel tranſſudare permiſerunt, vel itidem in rimas dehiſcunt, aut vitrificantur, unde purum Sal alcali nunquam emerſit. Unde pro hoc fine aſſequendo ejusmodi vaſa quærenda ſunt, quæ ex ejusmodi Terra vel mixtura cocta ſunt, qua propter minorem poroſitatem tranſſudationem impediant, & vitrificationi diu reſiſtant, & nec ab acida nec ab alcalina Nitri portione corrodantur vel alterentur: tum enim utique apparebit, Spiritum Nitri acidum per ſe tranſpelli poſſe, remanente alcali fixo puro: Hæ conditiones non ſunt impoſſibiles, ſed reperiuntur primario in ejusmodi Tigillis & vaſibus retortis, quæ ex bona bene temperata alba & pura argilla confecta ſunt, ex qua Terræ alcalinæ & vitreſcibiles arenariæ curioſe ſeparatæ ſunt: nam ejusmodi alba argilla omnium optime igni vehementiſſimo reſiſtit, ab acido Nitroſo non corroditur nec ſolvitur, nec cum alcali Nitri tam facile in vitrificationem tendit, niſi nimium longinquo igne in fluxu detineatur; Juſta mixtura terrarum, quæ porcellanam veram conſtituunt

ſtituunt, itidem pro hoc ſcopo accommodata reperietur, ſi ex ea tigilla vel vaſa Retorta formentur. Sic quoque ex ferro fuſo bonæ notæ ſi vaſa retorta parentur, eundem effectum producunt, dum Nitrum per ſe in illis diutino ſatis igne liquatum Spiritum ſuum acidum in vas recipiens dimittit, ut purum alcali in reſiduo reperiatur. Qui vero his adminiculis inſtructus non eſt, is adhuc facilius, quamvis cum aliqua additione, ad eandem metam pertingere poterit, licet paulo impurius appareat: dummodo Nitrum cum alba argilla pulveriſata mixtum] in vaſe retorto vitreo vel terreo deſtillationi juſtæ ſubjiciat, nam Spiritus Nitri acidus rubro colore tranſit; & ſi per debitum tempus ignis continuatus adhibitus fuerit, tum ex maſſa reſidua purum alcali elixari poteſt, quod ſufficiens indicium eſt, argillam albam (prout forte nonnulli concludent) nihil acidi Vitriolici continere, ut ex hac ratione Spiritum Nitroſum tranſpellat: nam alias ex hoc reſiduo non Sal alcalinum, ſed Tartarus Vitriolatus emergeret. Has ergo Methodos philochymici, ſi ipſis placet, etiam ad Sal commune & alia Salium magis fixorum genera facile applicare, indeque animadvertere poterunt, quæ phænomena ſub his apparatibus occurrant. Interim patet ex his, quam difficulter in Chymicis axioma generale per inductionem exemplorum ſtatuminari poſſit.

§. IV.

Jam vero, ut propinquius accedamus ad ea experimenta, per quæ D. du Hamel probare contendit, quod baſis Salis

lis communis ſit Sal alcali: non nego ea mihi adhuc videri inſufficientia: id ad minimum in cujusvis oculos incurrit, producta ipſius a puro Sale alcalino vegetabili in non paucis circumſtantiis multum differre, a qvo tamen denominationem recipere debet; dum hoc nunqvam alia ratione, qvam per combuſtionem vegetabilium componitur, aut generatur, qvale qvid circa baſin Salis communis neqvidem præſumi poteſt, dum præter viam combuſtionis nusqvam in toto geocoſmo purum & perfectum Sal alcalinum invenitur. Id vero ſufficienter notum eſt, ubique & copioſiſſime in terris reperiri terras & lapides alcalinos ſeu antacidos, qvi acidum in Terra & aere vagans magnetis ad inſtar attrahunt & ſaturant, unde utraque pro ulterioribus attenuationibus & immutationibus aptiora redduntur, adeoqve à priori potius pro præſentia Terræ alcalinæ in Sale communi concludere deberemus; interim & ipſæ hæ Terræ alcalinæ qvoad teneritudinem, item majorem vel minorem citiorem vel tardiorem ſolubilitatem aliasque immixtiones inter ſe differre, qvin & per diverſa acidorum genera vario modo transformari posſunt, ut experientia monſtrat.

§. V.

Oppoſitæ partis argumentum non plane invalidum reponit: baſin Salis terram eſſe non poſſe, *qvia ex ſolutione Salis per Sal alcali nulla Terra præcipitari posſit*, cum tamen omnes aliæ Terrarum in acidis ſolutiones per alcalina Salia præcipitentur; hæc qvidem inſtantia multum probabilitatis

 mon-

monſtrat, dum factum ipſum negari neqvit. Interim exiſtimo, differentiam hic attendendam eſſe inter ſolutionem Terræ magis ſuperficialem, & intimiorem, nec non inter Terram alcalinam craſſiorem & ſubtiliorem, motum celeriorem ſuperficiarium, & intimiorem coagitationem: Ad minimum non improbabile mihi videtur fieri poſſe, ut perqvam tenera Terra alcalina in viſceribus Terræ per inſtrumenta diutini motus intrinſeci conqvaſſatorii longe intimius cum acido uniri qveat, qvam ejusmodi Terra crudior in ſolutionibus repentinis magis ſuperficialibus ſolet, indeque ſolutio adeo arcta emergat, ut per Sal alcali poſtmodum divelli neqveant; dum ejusmodi ſolutionis & combinationis ſpecies etiam in ipſo Sale alcalino contingit, qvippe qvod, licet maxime depuratum, tamen terram aliqvam ſecum intime fovet complicatam, non niſi diutino labore ſeparabilem. Poſſibilitas hujus rei qvoque apparet ex diverſis experimentis e. g. Terra vitreſcibilis Boracis nec a volatili nec fixo Sale alcalino præcipitatur: Idem contingit cum Sale fuſibili urinæ: merito qvoqve huc pertinet experimentum expertiſſimi noſtri Chymici Dni Marggraf circa acidum phoſphori poſt ipſius deflagrationem relicti, hoc enim aperte continet Terram vitreſcentem in acido ſuo ſolutam, nihilominus ſimili eventu nec à volatili nec fixo Sale alcalino ea præcipitari poteſt, ſolo vero adhibito igne ea mox in conſpectum venit: qvod conſideratione utique eſt digniſſimum.

§. VI.

Alterum contrarie ſentientis D. du Hamel argumentum nititur ſeqventi experimento: Qvod ſi *Sal commune beneficio olei vitrioli in Sal mirabile convertitur, & hoc mediantibus carbonibus in hepar Sulphuris commutatur, ex cujus ſolutione Sulphur per acidum aceti præcipitatur, a reſidua maſſa Salina acetum forti igne abſtrahatur, tum reſtare Sal alcali tanquam baſis Salis communis.* Verum liceat his regerere, quod cuique palam conſtet ſub his variis mixturis & laboribus purum & naturalem partium conſtitutivarum ſeparationem contingere vix poſſe, propter additionem diverſorum acidorum & carbonum, de qvibus aſſeri vix poteſt, quod ſub iſtis laboribus acida præcipue plenario, & in totum ſeparentur & ejiciantur, ut baſis pura & incontaminata reſtare poſſit; qvod & inſignis imminutio & inverſio transgreſſi acidi aceti abunde teſtabitur. Accedit, qvod adductæ proprietates reſtantis magmatis Salini minus ſufficienter comprobent, qvod hoc magma verum & perfectum Sal alcalinum conſtituat, id quod quoad ſingula per inſtantias probatum ibo. 1) *Sal hoc Syrupum Violarum reddit viridem*, hæc proba eſt inſufficiens: nam calx viva in aceto vel Spiritu Salis, vel Spiritu Nitri, vel Spiritu vitrioli ſoluta, ſolutio Aluminis uſti, ſolutio zinci in Spiritu Nitri vel in Spiritu Salis, ſolutio Vitrioli albi, decoctum Cretæ &c. itidem Syrupum Violarum reddunt viridem, nec tamen quis propterea ea pro Salibus alcalinis venditabit, 2) *præcipitat ſolutionem Mercurii ſublimati*

colore aurantio: verum idem contingit cum decocto calcis vivæ, 3) *ſolvitur in aqua*, id partim immixtis partibus Salinis attribuendum videtur, partim ipſa calx viva & creta repetita præprimis coctione magna ex parte in aqva diſſolvuntur, ut filtrum tranſeant, 4) *effervſcit cum aceto deſtillato:* hoc etiam terris alcalinis cretaceis & calcareis ſolemne eſt: & hoc Sal prout illæ ipſæ Terræ cum aceto non efformat Terram foliatam Tartari, ut vera genuina Salia alcalina ſolent, 5) *præcipitat ſolutionem Calcis ex acido Salis*: (incongrue hæc mixtura a D. du Hamel oleum calcis appellatur) hoc phænomenon vel ex immixto acido Vitriolico, vel majori Terræ ſuæ ſolubilitate & teneritudine derivari poſſet, qua terra craſſior per teneriorem deturbatur. Adde his, quod ipſe D. du Hamel p. 224. cogatur fateri: qvod Sal hoc cum acido Vitriolico non componat Tartarum Vitriolatum, prout pura Salia alcalina ſolent, ſed ſpeciem Salis mirabilis; & cum acido Nitri non format Nitrum acuminatum ſed quadrangulare; & cum acido Salis non Sal digeſtivum, ſed Sal marinum cubicum: unde his notis aperte a veris Salibus alcalinis discrepat. In eo vero habet me conſentientem, quod Sal commune ratione hujus baſis cum Natro ægyptiaco, Borace & Soda multum conveniat; ubi circa Natrum præcipue diluceſcit: quod id præter Sal marinum etiam quasdam partes Sali mirabili æmulas contineat, dum linguæ frigidiuſculum ſaporem imprimit, ſub aere calido in pulverem fatiſcit; nec non terram crudiorem alcalinam in acido Salis ſolutam: unde

unde ad latera vitri effloreſcit, & a Sale alcalino dejicitur Terra ad fundum, plane ad modum lixivii ultimi non cryſtalliſabilis ex Sale communi, de quo egi in Obſervat. circa Sal commune p. 17.

§. VII.

Tertia probatio D. du Hamel continet ſequens Experimentum: *Quod ſi purus Spiritus Nitri a Sale communi aliquoties abſtrahatur, poſtea cryſtalliſetur, & hoc Nitrum quadrangulare cum pulvere carbonum detonetur, tum reſtare Sal alcali ejusdem indolis ac præcedens, per oleum Vitrioli paratum.* Verum, quis vadimonium præſtabit, quod acidum Nitri ſub hac detonatione aliquam partem Salis alcalini non generaverit; id quod repetita adhibitione Spiritus Nitri cum certo & definito Salis alcalini pondere, & caute inſtituta detonatione inquiri poſſet? annon Sal alcali exinde pondere adauctum reſtet: præterea habemus & hic confitentem reum, dum agnoſcit, ipſum hoc ita dictum Sal alcali maxima ex parte cryſtalliſari inſtar Salis mirabilis; ſuper ſpathula ferrea ignita intumeſcere; ab aere non deliqueſcere ſed in pulverem farinaceum fatiscere; linguæ frigidiuſculum & amarum ſaporem imprimere, qui tantum ex poſt in lixivioſum deſinat: nam hæ proprietates omnes & ſingulæ genuino Sali alcalino minime conveniunt: Et quamvis negari non poſſit, quod ratione quarundam proprietatum ad Sal alcali quodammodo accedat, tamen etiam differentiæ ſat notabiles intercedunt, ex quibus generatio Salis mirabilis per additionem acidi Vitriolici ſatis

inſignis eſt, dum nullibi Tartarum Vitriolatum efformat; & quamvis etiam aliquod ſaponatum productum conſtitueret; notum tamen eſt, quod aqva calcis vivæ ſimile qvid efformet.

§. VIII.

Poſitivas rationes, quæ me inducunt, ut inclinem ad ſententiam, quod baſis Salis communis potius pro Terra alcalina, licet proxime Salina, habenda ſit, allegavi in Obſervat. meis circa Sal pag. 45. ex quibus præcipue notandum 1) qvod omnes Salis communis ſpecies poſt cryſtalliſationem ultimato demum lixivium non cryſtalliſabile relinquant, ex quo mediante Sale alcali terra alba præcipitatur, hanc terram reſpicio tanquam baſin Salis communis, quamvis nondum ſatis ſubtiliſata, & exinde paulo imperfectius cum acido ſuo unita ſit: 2) ipſum etiam Sal commune perfecte cryſtalliſatum repetita ſolutione & digeſtione fatiſcit ſenſim in ſimile lixivium minus cryſtalliſabile; & tum eadem ratione per Sal alcalinum plane ejusmodi Terram albam dimittit, unde ſub hac ſolutione in aqua & digeſtione vinculum Terræ & acidi diluendo debilitatur, eadem ratione ac ſub digeſtione ſolutionis Vitriolicæ filtratæ ſenſim portio aliqua Terræ metallicæ ad fuadum ſecedit: 3) magna differentia Tartari Vitriolati verſus Sal mirabile quoad ſolubilitatem infuſibilitatem &c. magnum quoque diſcrimen baſis ipſorum commonſtrat. 4) Nitrum cubicum præcipitat Mercurium ex aqua forti colore albo, 5) præcipue vero huc facit Experimentum, quod l.c.

p. 108.

p. 108. adduxi: Si ſcilicet recipiatur lixivium ultimum Salis fontani non cryſtalliſabile, vel quod ex repetita Salis communis ſolutione & cryſtalliſatione ſemper reſtat humidum non cryſtalliſabile magma, idque cum Spiritu urinoſo præcipitetur, calx edulcoretur, & ſolvatur in aceto deſtillato, ſolutio concentretur eique affundatur portio acidi Vitriolici, tum peracta juſta calcinatione ſolutione & cryſtalliſatione prodit verum Sal mirabile: Hic enim negari non poteſt, calcem iſtam, per Spiritum urinoſum præcipitatam, nullo modo eſſe Sal alcalinum, ſed eſt Terra inſipida, calx in aqua nullo modo ſolubilis, verbo vera Terra, quam nemo pro Sale alcalino agnoſcere poterit, nihilominus cum oleo vitrioli efformat Sal mirabile, eadem plane ratione, iisdemque phænomenis, ac ſi ipſum Sal commune adhibitum fuiſſet, unde concludo hanc Terram à baſi Salis communis non poſſe diſcrepare.

Appendicis loco annectere hic licebit experimentum ſatis curioſum, quod Hiſtoriam Phosphororum quodammodo adaugere poterit, cum ejus rei veſtigium nullibi repererim. Si argilla alba fortiter igniatur, notum eſt, eam notabilem duritiem concipere, quod ſi ea tum in mortario ferreo vel alio quocunque groſſe contundatur, inſtar lentium vel cicerum, & hæc fruſtula poſtmodum in mortario vitreo in loco tenebroſo conterantur, amoeniſſimo ſpectaculo ſub hac tritura lux & fulgor ubiqve emicant, & hæc quaſi fulguratio tamdiu durat, donec fruſtula hæc in minutum pulverem converſa fuerint.

Num. *III.*

NUM. III.

Ejusdem

Monita de cauſa rubedinis vaporum acidi Nitroſi.

§. I.

SOcietatis Scientiarum Pariſinæ Celebris ſolersqve Chymicus D. Hellot in Actis Anni 1736. p. 23. omnem navat operam, ut demonſtret, qvod fundamento non deſtituantur conjecturæ ſuæ de origine rubedinis vaporum acidi Nitroſi; exiſtimat enim, eam non oriri, ut Stahlius & non pauci alii ſtatuunt ab expanſione partium inflammabilium, qvæ in Nitro continentur; ſed potius a Martiali & ammoniacali ſubſtantia, qvæ in ipſo occulta ſit. Hinc operæ pretium exiſtimo hac vice inqvirere, an, qvæ à celebri hoc Chymico aſſeruntur experimenta & argumenta, id revera probent, qvod probare debent, & exinde ſufficientes rationes præbeant, a Stahliana explicatione recedendi, & hanc potius adoptandi; de qvo omni jure meritoqve maxime dubito, & qvidem ex ſequentibus occurrentibus circumſtantiis, ni fallor, ſat gravibus.

§. II.

Primum Experimentum, qvod demonſtrare debet, qvod in Nitro ſubſtantia ammoniacalis contineatur, conſiſtit in eo; qvia

qvia Sal armoniacum cum vitro liquatum eadem ratione vitrum rubrum efformat, ac ſi vitrum cum Nitro fundatur: aſt ego exinde nihil aliud colligo, quam quod in Sale armoniaco ratione Salis urinoſi, quem copioſiſſime continet, plane ejusmodi principum oleoſum ſeu inflammabile occultetur, qvale in Nitro exiſtit, quamvis ſub differenti connexione; qvod enim hic effectus unice & ſolummodo dependeat a præſentia principii inflammabilis, exinde patet, quia coloratio ejusmodi vitrorum, ut vitri rubinci, Laſuri Stolliani abſolvitur fuliginoſo fumo lucide flammantis ligni, ſtraminis, fumi Tabaci & carbonum foſſilium, quod omnibus harum rerum artificibus notum eſt, in quibus nulla probabilitate præſentia Salis ammoniacalis præſto eſt; imo cuprum deſtructum & vitrificatum etiam ejusmodi colorem producit.

§. III.

Urgetur porro ab ipſo Experimentum D. Lemery in actis de An. 1717. quod in Nitro urinoſum vel ammoniacale contineatur; quia, ſi Nitrum cum calce viva in mortario calido conteratur, poſt quadrantem horæ demum odor urinoſus exſurgat: verum hoc experimentum cum noſtra calce viva ſuccedere recuſat; & quod ſi etiam ſuccederet, tamen ſufficiens probatio exinde deduci non poſſet, dum non raro ejusmodi urinoſum per diutinam attenuationem teneri phlogiſti verſus corpus alcalinum demum per novam ſecretionem & combinationem generatur: quod is facile concedet, qui perpendit, quod acidum Salis cum calce viva Spiritum

notabiliter urinoſum producat, quis vero propterea in Spiritu Salis urinoſum quippiam ſubſumet? ſic ex mixtione Vitrioli & calcis vivæ, Aluminis & calcis vivæ, Aluminis & Salis Tartari, Tartari crudi & calcis vivæ, olei vegetabilis eſſentialis cum oleo Vitrioli & Sale alcalino &c. Spiritus urinoſi prodeunt, qui revera ſub his mixtionibus prius generantur ex attenuatione partium pingvium & acidarum verſus corpora alcalina. Hoc pro certo reputo: Si in Nitro a natura pars urinoſa vel ammoniacalis revera & actu præſto eſſet, neceſſario ſequeretur, ſi Nitrum cum calce viva vel Sale Tartari mixtum via humida vel ſicca deſtillationi ſubjiceretur, quod tum hoc urinoſum ſub forma Salis vel Spiritus dimittet; verum ego ſub hac tractatione nullum ejus veſtigium animadvertere potui; cum tamen calx viva ubique citiſſimus ejus proditor reperiatur: quod ſi vero Nitrum cum Carbonibus detonando deſtilletur, generatus exinde per copioſiorem immixtionem acidi cum terra carbonaria phlogiſtica Spiritus urinoſus, mox in apricum prodit. Non ignotum quidem eſt, non paucos magnæ famæ Chymicos in Nitro urinoſum ſtatuere, ſed ubique non niſi novum generatum exiſtit, ſi juſte perpendatur, quamvis Beccher, Bohn. Kunckel, Glaſer, Lemery, Peterman, Hiærne, Stabel, &c. aliter ſtatuant. Sic Stabel, Kunckel, Bohn, Hiærne provocant ad mixtionem Nitri cum Sale alcali vel calce viva: Kunckel alibi ad mixtionem Nitri fixi cum oleo Vitrioli, Peterman ad rectificationem Spiritus Terræ Nitroſæ ſuper

Sal

Sal alcali, vel aquæ fortis ſuper Sal Tartari, vel aquæ fortis cohobationem a capite mortuo proprio, Glaſer ad magma reſiduum Spiritus Nitri & Spiritus vini; ſed ubique fere occurrit fallacia cauſæ.

§. IV.

Probatio exiſtentiæ Martialis terræ ut cauſæ rubedinis vaporum Nitroſorum itidem infirmioribus nititur fundamentis, ſic enim neceſſum foret, ut ex commixtione & deſtillatione Salis communis cum ferro, Salis armoniaci cum ferro, Aluminis aut Vitrioli cum ferro, imo etiam Spiritus urinoſi cum ferro rubicundi vapores emergerent; ſed hoc non contingit: ſic quoque, ſi Spiritus Vitrioli cum ferro miſcetur, vel Spiritus Salis cum ferro combinatur, licet etiam ubique ex ſuperpondio Sal armoniacum addas, nullibi prodeunt Spiritus rubicundi Nitroſi. Quod autem ex Spiritu Salis & ferro ſub certis circumſtantiis & enchireſibus (quas Stahlius noſter adduxit) utique Nitroſi quippiam generetur, id quidem mihi non ignotum eſt; ſed novi etiam, hoc non fieri ratione totius ferri in cruda ſua ſubſtantia, ſed ratione copioſe & magis ſuperficietenus ferro inhærentis principii inflammabilis (quod plerumque in Gallia minus accurate bitumen appellant, cum tamen bitumen proprie non partem inflammabilem puriorem, ſed potius eam ipſam jam cum acido Vitriolico conjunctam deſignet, qualis acidi Vitrioli conjuncti præſentia in metallis demonſtrari nequit). Quod vero hoc vera hujus phænomeni cauſa exiſtat, exinde probo, quia

ex Zinco & acido Salis concentrato per certas enchireſes in momento Spiritus ruber Nitroſus generari poteſt, (quod Experimentum æſtumatiſſimi cujusdam Chymiatri communicationi benevolæ debeo) jam vero nemo in Zinco præſentiam ferri ſubſumere multo minus demonſtrare poterit, ſed præſentia inflammabilis cujusdam, quod ipſi tam copioſe & leviter inhæret ac ipſi ferro & forte adhuc copioſius, cuique ſatis in oculos incurrit; multo minus exiſtimo quenquam in Zinco aliquid ammoniacalis exſpectaturum eſſe. Accedit, dum Stahlius noſter Sal commune vel alcali in via ſicca in fluxu in Nitrum plenarium convertit, quod hoc neceſſario intimiori immixtione & coagitatione principii inflammabilis abſolvi debeat, cum additio urinoſi vel ammoniacalis cum hoc ignis gradu conſiſtere non poſſit.

§. V.

Rubedo porro ſolutionis ferri in acido Nitri, quæ ab additione olei Vitriolici deprimitur, ſed ab additione Salis ammoniaci denuo producitur & exaltatur, ſecundum p. 26. nihil demonſtrat, niſi vim expanſivam partium inflammabilium, quæ in parte urinoſa Salis ammoniaci continentur: Et cum D. Hellot l. c. p. 27. urget; quod ex Alumine calcinato, Nitro ſicco & Zinco transpellatur Spiritus Nitroſus ſub vaporibus albis, qui tamen cum oleis in flammam erumpat; tum hoc non probatur plenaria principii inflammabilis in hoc Spiritu abſentia, ſed tantum quod vapores rubri a partibus

tibus aquoſis aluminis & Nitri quaſi occultentur, nam transpulſa maxima aquæ copia vapores inſequentes rubicundo ſatis colore ſequuntur: & cui ignotum eſſe poterit? quod ex ſolo Alumine calcinato & Nitro mixtis & deſtillatis itidem apertiſſime vapores rubri tranſeant, ac cum Vitriolo ipſo, quamvis in alumine nihil Martialis demonſtrari poſſit: addo his, ſi Nitrum cum argilla alba puriſſima miſceatur & deſtilletur, tranſeunt ſimili ratione pulcherrimi rubicundi vapores, cum tamen in pura argilla nullum principii Martialis vel Vitriolici veſtigium detegere liceat, id quod ejus examina vitrificatoria liqvido monſtrant. Non multum diſſimili ratione diſcutitur objectio D. Hellot: qvod Nitrum cum oleo Vitrioli leni igne deſtillatum largiatur Spiritum fumis albis tranſeuntem, qui tamen optime cum oleis inflammetur, inſeqvens ruber vero minus: nam cum oleo vitrioli ſufficienter concentrato vix ſuccedet, hoc enim, ſi Nitro affundatur, mox absqve ullo calore vapores intenſe rubros diſpergit, ſi vero oleum Vitrioli dilutius exiſtat, tum conjunctim tranſeuntes vapores aqvei rubedinem Spiritus per aliqvod tempus involvendo occultabunt, donec hi maxima ex parte tranſierint: qvod vero poſteriores hujus Spiritus partes licet ruberrimæ minus cum oleis in flammas fatiſcant ac priores, id immixtis & ſimul translatis partibus qvibusdam inertioribus olei Vitriolici adſcribendum eſſe cenſeo; cum ex adverſo ipſe urgere poſſim, qvod Nitrum cum arſenico mixtum & deſtillatum vapores maxime rubicundos

 ſiſtat,

ſiſtat, nec tamen qvicqvam ſubſtantiæ Martialis in arſenico detegi poteſt.

§. VI.

Contra principale & maximum D. Hellot experimentum p. 34. qvo per analyſin Martialis ſubſtantiæ præſentiam in Spiritu Nitroſo demonſtrare nititur, non pauca adhuc cum fundamento opponi poſſunt. Conficit quippe methodo ſatis nota Mercurium ſublimatum rubrum, hunc cum recenti Nitro & Vitriolo adhuc ſexies vel ſepties ſublimat, ſublimatum hoc conterit cum portione anatica Nitri, & deſtillat, ſic tranſit Mercurius ex parte, reſtante maſſa Salina rubicunda inſtar Laccæ, hæc edulcoratur, tum bis vel ter absque additione per ſe ſublimatur, ſic acidum abſcedit, reſtante pulvere magis fixo, qui denuo edulcoratur, & tum per ſe igne nudo in vaſe retorto tractatur, ita tranſtillat reſiduus Mercurius, & reſtat pulvis ruber, hunc pulverem (quod bene notandum) aperto igne & vaſe calcinat, poſt cum materia pingvi (itidem aperto igne fundendo) reducit, tum pulvis reſtans aliqva ex parte a magnete attrahitur pro indicio terræ Martialis. Verum ſi labor hic paulo accuratius conſideretur, merito quæſtio inſtituenda venit: annon ſub iſta toties repetita Mercurii cum Vitriolo Martiali ſublimatione Mercurius præter animam Nitroſam etiam reipſa aliquam licet parcam ſatis portionem ſubſtantiæ Martialis vel ejus Terræ attenuatæ ex Vitriolo ſecum elevare potuerit? hoc tanto apertius urgendum, cum ipſemet fateatur, quod

ex

ex Vitriolo Zinci tantum tertia unius grani pars a magnete attracta fuerit, quamvis neceſſario hæc mixtura Spiritus eadem proportione rubicundos præbuerit, ac reliquæ mixturæ; ſic quoque ex mixtura cum Alumine parata tantum quarta unius grani pars attracta fuit, cum tamen etiam alumen cum Nitro ſatis rubentes vapores ſuppeditet; & ſic quoque per parum fuit, quod ex Vitriolo albo ſeparari potuit: nonne ex his aperte elucеſcit, eo plus martialis terræ ſeparatum fuiſſe, quo plus Vitriolum de ferro participaverit, & vice verſa: Et annon maxime probabile eſt, quod in iſtis abſtractionibus, & præcipue ſub calcinatione & reductione, vera Nitri anima amiſſa & in aerem diſpulſa fuerit; quod tanto manifeſtius evaderet, ſi pondus pulveris ante calcinationem notatum fuiſſet, & quantum abſoluta calcinatione relictum fuerit, ut inde pondus deperditum ſubſumi potuiſſet: nec impoſſibile exiſtimo; quod tot repetitis laboribus, fugatis præcipue partibus ſubtilioribus, quædam reliquæ particulæ rurſus immutari, condenſari, transformari, indeque ex parte in Martialem naturam degenerare tandem poſſint, ex quo inſufficientia concluſionis elucеſcet. Ipſe ego jam ab aliquot retro annis hunc ipſum Mercurium ſublimatum rubrum ſequenti ratione tractavi: Nimirum converti ipſum beneficio Spiritus Salis communis in Mercurium ſublimatum album corroſivum, hunc. Mercurium ſublimatum album additione recentis ſufficientis quantitatis Mercurii currentis converti in Mercurium dulcem; hac ratione portio non adeo exigua

animæ

animæ Nitroſæ reſtitit ſub ſorma terræ flavæ, hanc igne flammæ cum fiſtula ſerruminatoria ſuper carbone liquavi, ita per aliquod tempus fundebatur in vitrum opacum, ſed demum in auras evaneſcebat nullo notabili veſtigio Martiali relicto: ut hac vice taceam, quod hic Mercurius ſublimatus ruber, vèl ex ipſo ſeparata anima Nitroſa diverſis aliis rationibus tractata & applicata, ejusmodi producta conſtituant, quæ a crudo Martiali plane fruſtra exſpectantur.

§. VII.

Quando D. Hellot ulterius p. 37. Sal armoniacum in Spiritu Nitri ſtatuminare contendit, provocat ad communem notitiam qva certum ſit, quod Spiritus Nitri addito Sale armeniaco rubicundiores vapores efformat, quam per ſe; ego vero mallem dicere ſubtiliores & magis elaſticos, qvam rubicundiores: ſed hoc etiam conceſſo, ſacile tamen liqvet, hoc non niſi ratione principii oleoſi in Sale armeniaco involuti contingere, dum itidem non ignotum eſt; acidum Nitri cum Spiritu Vini rectificatiſſimo, cum oleis eſſentialibus, cum Zinco, Cupro, Wismutho, butyro Antimonii &c. plane ſimiles, imo ex parte adhuc magis rubicundos vapores conſtituere, nec tamen propterea qvisqvam ex his ſubjectis ammoniacale qvippiam exſpectaturus eſt; qvod vero in his omnibus & ſingulis phlogiſton contineatur, id quidem in propatulo eſt, nec difficili probatione indiget: & quare Sal armoniacum cum oleo Vitrioli vel Vitriolo Martis mixtum non producit vapores rubicundos Nitroſos, cum tamen hic

utrum·

utrumque & Sal armoniacum & ferrum concurrant: Dum vero p. 38. exiſtimat ex Nitro Spiritus ſeu vapores rubros absque additione acidi Vitriolici produci non poſſe, loco inſtantiæ equidem non urgebo deſtillationem Mixturæ arſenici & Nitri; ſed producam mixturam ex Nitro & argilla alba, hæc largitur ſufficienter rubicundos vapores, cum tamen in argilla alba nihil acidi Vitriolici reperiri, multo minus ex ea demonſtrari poſſit, dummodo pura & non colorata exiſtat, qualis copioſe occurrit. Elegans autem, quod D. Hellot producit Experimentum, circa volatiliſationem Auri per Sal armeniacum demonſtrat tantummodo exaltationem coloris per partem tenerrimam principii inflammabilis in Sale urinoſo Salis ammoniacalis.

§. VIII.

Nec confert ad meliorem probationem quod p. 39. adducitur experimentum: ſi aquæ forti calefactæ injiciatur Ferrum, quod ſub efferveſcentia rubræ guttæ tranſtillent; nam rubedo hæc non derivanda eſt a toto corpore crudi ferri; ſed, quod ſæpe jam monui, ab ipſius parte inflammabili teneriori, idem quippe Experimentum ſuccedit cum Regulo Antimonii, Wismutho, Zinco, Cupro, Stanno, in quibus ſub efferveſcentia ſimiles guttæ rubicundæ transferuntur, nec tamen exinde quisquam his ſubjectis ferrum ineſſe ſtatuet, præſentia vero inflammabilis partis in his corporibus etiam ex pluribus aliis experimentis abunde eluceſcit. Quod p. 40. in medium profertur phænomenon, qvo Sal armoniacum

cum Croco Martis ſublimatum vapores rubros proferre dicitur, id potius per corporeum ſublimatum, quo Sal armeniacum aliquas ferri partes elevat, & ab iis colore flavo tingitur, explicandum eſt: Laudanda interim eſt modeſtia D. Autoris, dum p. 42. concludit, ſe inde non perfectam demonſtrationem inferre; ſed tantummodo tanquam conjecturas aliis committere.

Num. IV.

Ejusdem

Vitrioli albi Analyſis juſtior quam Lemeriana.

§. I.

Quod celebritas Nominis inter Eruditos, indeque exorta autoritas & exiſtimatio veritati ipſi non raro præjudicium afferre poſſint & ſoleant, id ii non ægre concedent, qvi animo perpendent, quod omni ævo autores ejusmodi immaturi exſtiterint, qui, cum ex proprio penu nihil ſingularis depromere poſſint, nihilominus, ut & ipſi famoſi reddantur, nihil fere agunt aliud, qvam ut aliorum labores tranſcribant: quodſi vero ii, quorum operas absque inſtituto examine, præjudicio autoritatis ſeducti, ſervili ingenio adoptant, in quibusdam circum-

ſtan-

ſtantiis erraverunt, prout nemo humani quicqum alienum a ſe reputare poteſt, non poteſt non fieri, quin tum non modo errores iſtos facili manu propagent, ſed & (quæ ſeculi hodierni mos eſſe conſvevit) ex nimio ſyſtemata & axiomata producendi pruritu, fallaces exinde concluſiones & conſequentias in copia nectant, indeque excelſa faſtuoſæ imaginationis ædificia exſtruant, quæ tamen, ſimulac primus fundamentalis error detectus eſt, in ictu oculi quaſi diſpereunt & annihilantur. Unde veritati utique litat, qui commiſſos ejusmodi errores a magnis viris cum debita modeſtia detegit, ne latius ſerpendo plures in ſui conſortium trahant: Liceat nobis hac vice id exemplo quodam Chymico illuſtrare.

§. II.

Laudabili conatu clariſſimus Societatis Scientiarum Pariſinæ Chymicus D. Lemery in Actis hujus Accademiæ Anni 1735. p. 262 & 385. publici juris fecit: *Novas Explanationes circa Alumen & Vitriolum, & in ſpecie circa compoſitionem naturalem hactenus ignoratam Vitrioli albi ordinarii*, quin & ulterius hanc materiam Anno 1736. p. 263. prout ipſi quidem ſolenne eſt, prolixe & verboſe ſatis proſecutus eſt, idque tanta cum parrheſia, ut incautos & imperitos facile in ſui conſenſum trahere queat. Nos vero ex his pauca quædam delibabimus, quod nemo, cui veritas cordi eſt, vitio nobis vertet. D. Lemery 1735. p. 388. occaſione ſcrutinii Salis iſtius, quod ex capite mortuo Vitrioli elixatur, bene annotat, quod Sal hoc cum decocto Gallarum non nigreſcat, & cum alcali item

cum Borace terram albam præcipitet, concludens exinde: *hoc eſſe Alumen*, addit autem: qvod *nemo hactenus in hoc capite mortuo ſuſpicatus ſit Alumen.* Hic exiſtimo ſententiam hanc tantummodo de Chymicis Gallorum intelligendam eſſe; nempe quod nemo Gallorum hactenus in hoc Sale capitis mortui Vitrioli præſentiam Aluminis cognoverit vel ſubolfecerit. Nam in Germania hæc veritas jam multum ante nota fuit: prout D. Stahl de Elogiis Vitrioli 1716. editis p. 35. expreſſe ait: *Sal Vitrioli deſtillatione dat Spiritum Vitrioli ordinarium, & caput mortuum eſt partim metallicum ferreum vel cupreum partim terreum Aluminoſum.* Item D. P. Juncker in Chymia: *Sal fixum Vitrioli non differt a Vitriolo, niſi quod aluminoſum contineat.* Nec hic locorum incognitum, quod ex pleroque Vitriolo præcipue Martiali additione urinæ quædam portio Aluminis ſequeſtrari queat. Kunckelius jam in Arte Vitrar. p. 180. notat: Vitriola nonnulla aluminoſi permultum fovere.

§. III.

Porro D. Lemery l. c. adducit: *ſolutionem Aluminis cum decocto Gallarum virideſcere*, indeque nimis præcipitanter concludit: *in alumine latere aliquid Vitrioli Venerei.* Aſt error hic facile contingere potuit vel alumine ipſo vel vaſe fortaſſis impuriore exiſtente; quod tanto uerofimilius, quia ipſius teſtimonio *cum ſolutione Aluminis uſti non ſuccedit, nec cum ſolutione quæ per ſex menſes repoſita fuerat;* accedit, quod nullo alio indicio e. g. Spiritus urinoſi hactenus aliquid Venerei

rei detegi potuerit. Imo ſolutio Aluminis, quod hic locorum paratur, cum decocto gallarum mixta viridem colorem non producit, ſed ex glauco flaveſcentem, adeoque hæc viriditas D. Lemery vel tranſiens emphatica fuit, vel impuritas in vaſe latuit, vel eſt ſingularis impuri Aluminis ſpecies, quam ipſe adhibuit. Occaſione hac prætermittere non poſſum errorem D. Lemery, quod in his actis anni 1736. p. 263. multis ambagibus tenaciſſime contendit: *alumen omnium optime & certiſſime manifeſtari per affuſionem olei Tartari per deliquium, a quo Terram albam præcipitat*, inde enim concludit: ſimulac ſolutio quædam cum acido Vitriolico parata ab oleo hoc Tartari terram albam dejiciat, tum absque hæſitatione ſubſumi poſſe, hic adeſſe verum Alumen; adeoque proba hæc exiſteret Aluminis proprium in quarto, quod omni ſoli & ſemper ineſt. Negari quidem non poteſt, quod omne verum Alumen ita ſe habeat; ſed propoſitio non eſt convertibilis, ut exinde concludere poſſim: ergo omnis ſolutio cum acido Vitriolico peracta, ſi ab oleo Tartari terram albam præcipitat, pro vero Alumine declaranda eſt. Siquidem ſolutiones argenti, Stanni, Zinci, Wismuthi, Cadmiæ, & forte adhuc aliorum per acidum Vitriolicum inſtitutæ, pari ratione ab oleo Tartari in pulverem album præcipitantur, & tamen non conſtituunt Alumen. Poſſet quidem hic opponi, quod in his non terra alba, ſed calx alba metallica reducibilis præcipitetur; verum ſimplici intuitu Terra a calce metallica alba diſtingvi minime poteſt, prout

hac in re ipſe D. Lemery (ut paragraphis ſeqventibus manifeſtabimus) exemplo ſuo docuit; quam facile hic error committi poſſit, cum unusquisque accuratum examen horum præcipitatorum ſuſcipere & abſolvere non valeat.

§. IV.

Tranſeamus proinde ad examen Vitrioli albi, cujus compoſitio hactenus ignorata utique fuit, quod & adhuc nuper *D. Cramer in Elementis artis Docimaſticæ* p. 245. teſtatur: *Vitriolum album Goslarienſe alibi non reperiri; eſt in eo cuprum & ferrum, ſed & præterea aliud quid non metallicum, cujus natura nondum hactenus bene perſpecta eſt, unde, quantum ſcio, nulli hucusque licuit id imitari.* Aſt D. Lemery l. c. firmiter aſſerit: id conſtare ex Alumine copioſiore & pauciore Vitriolo Martis; ratio ipſi eſt, quia hæc compoſitio, ſi miſceatur cum decocto gallarum, nec non cum oleo Tartari, eodem modo quoad colores & phænomena ſe habet ac Vitriolum album, fatetur tamen, adhuc perpaucum quoddam alius cujusdam ſubſtantiæ adhuc immixtum eſſe poſſe: & anno 1736. p. 223. autumat, hoc eſſe Saturnini quippiam, unde etiam ſaporem quendam dulcem linguæ imprimat. Verum omnes hæ opiniones nullo nituntur Fundamento: ex ſequentibus potius apparebit, in hoc Vitriolo nihil aluminoſi, multo minus quicquam Saturnini contineri; quamvis alii quoque exinde partes plumbeas probare conentur 1) quia ex minera Saturnina conficiatur, ubi ſub toſtione acidum Sulphureum partes Saturninas ſolvat, 2) quia ſapore dulci præditum eſt 3) qvia

in

in morbis oculorum effectum refrigerantem exſerit. Sed qvi novit, quod acidum Sulphureum difficillime vel plane non ita aggrediatur plumbum, ut illud ad ſolutionem diaphanam & cryſtallinam diſponat, is vel ex hoc ipſo de ejus præſentia dubitabit: &, quod maximum eſt, nullum granum veri plumbi ex quantalibet copia Vitrioli albi, quocumque modo, via humida vel ſicca tractetur, produci poteſt: & eſt error, quod D. D. Brückmann in Magnalibus ſubterrâneis P. II. p. 361. aſſerit: *Vitriolum album cum alcali & Tartaro fuſum ſuppeditare granum plumbi*, nam, ſi quid metallici exinde recepit, quod fieri utique poteſt, ſi dextre inſtituatur labor, id certe nullo modo eſt plumbum. Reliquæ vero adductæ Vitrioli albi proprietates Saturno non ſunt ita propriæ, ut ex ſolo guſtu & effectu non tam refrigerante, quam potius reprimente ſufficiens indicium formari poſſit.

§. V.

Ut vero monſtrem, quales partes conſtitutivas Vitriolum album contineat, attendendum erit D. Lemery hic prætermiſiſſe cuprum, quod tamen revera, quamvis proportione minima, ipſi ineſt. Licet hoc videre, ſi Vitriolum noſtrum madidum affricetur ferro polito, quod mox rubedine cuprea inducitur. Nec exiſtimandum eſt, hoc cuprum forte a reſtante non cryſtalliſata Vitrioli Venerei ſolutione coerulescente externe adhæſiſſe, quia etiam poſt depurationem & cryſtalliſationem novam hunc effectum edit; quod ſi etiam cum oleo Tartari per deliquium præcipitetur, terra edulcorata

corata cum Spiritu urinoſo coeruleſcit; vel præcipitetur cum Zinco, & præcipitatum idem phænomenon monſtrabit; exinde quoque absque dubio vires hujus Vitrioli emeticæ deducendæ ſunt. Quod ferrum contineat, in dubium vocari nequit; ſiquidem Vitriolum album ſolutum & digeſtioni expoſitum præcipitat Terram flavam, quæ poſtquam cum phlogiſto tractata fuit, a magnete attrahitur: vel terra cum oleo Tartari præcipitata eodem modo tractetur, ſic ſimiliter ferrum in apricum producitur: huc etiam pertinet rubedo ſeu color puniceus ſub calcinatione proveniens. Acidum Vitriolicum in ipſo contineri, commonſtrat ipſius deſtillatio, qua Spiritum Vitriolicum fundit, ut & ejus ſaturatio cum Sale alcalino, ex qua genuinus Tartarus Vitriolatus emergit.

§. VI.

Cum vero præter hæc copioſa Terra alba ex Vitriolo noſtro per oleum Tartari præcipitetur, quæ maximum pondus conſtituit; jam inquirendum, cujus indolis hæc ſit. D. Lemery eam pro pura terra aluminoſa habet, idque mordicus tuetur: verum nihil minus eſt quam Terra Aluminoſa; quod exinde jam ſubſumi poteſt, quia Terra hæc longe gravior exiſtit quam Terra Aluminis, & longe copioſior adeſt: nam ex una Aluminis libra vix 4 unciæ Terræ prodeunt: cum ex una Vitrioli albi libra ejus 6 unciæ ſeparentur. Ut autem methodo ſimpliciſſima & infallibili monſtrem, quod hæc Terra alba non ſit Terra Aluminoſa, &

quid

qvid proprie ſit: nihil aliud facere convenit, qvam ſolutionem Vitrioli albi cum oleo Tartari præcipitare, præcipitatum edulcorare, edulcoratum cum phlogiſto ſecundum artem reducere, ita Terra hæc qvoad longe maximam ſui partem in purum & optimum Zincum convertetur, qvod omnes & ſingulas Zinci veri proprietates poſſidet, parcior terræ reſiduæ portio, ſi magnete circumvolvatur, ferrum attractum oculis cujusvis ſiſtit; Cuprum verum tanqvam pauciſſimum iis tenerrime interſperſum eſt, ita ut vix animadverti qveat. Qvod ſi poſtea eadem methodo Terram Aluminis edulcoratam tractes, tum ne granum qvidem Zinci inde reſultat. Unde opinor, probationem hanc eſſe ſatis liqvidam & convincentem, contra qvam nemo ne muſſitare qvidem poterit.

§. VII.

Facile conjicio pleroſque, qvi hæc legent, admiratione captos cogitaturos eſſe, qva ratione poſſibile fuerit, ut tot celebres Chymici, qui Vitrioli albi anatomen toties & cum tanta cura ſuſceperunt, hoc prætervidere potuerint: ita ut nemo adhuc tale qvicqvam demonſtrare valuerit, imprimis vero D. Lemery, qvi tot labores pro hoc fine aſſeqvendo impendit, item D. Geoffroy nonnulliqve alii: ſed liceat paucis reſpodere: partim nihil tale ſuſpicati ſunt, partim ignotum ipſis fuit, qvomodo reductio cum inflammabili ſecundum artem juſte inſtituenda ſit. Unde Zincum, qvod ſi etiam ab ipſis reductum fuit in aperto, ut ſolent, tigillo mox

more ſuo rurſus exardeſcit, & in Flores reſolvitur: Hi Flores autem, ſi denuo capiantur, ſimili ratione in priſtinum perfectum Zincum reduci qveunt; quamvis non neceſſe ſit ita per ambages incedere, ſed ſub juſta vaſorum diſpoſitione mox ſub prima operatione omne Zincum ſub forma metallica haberi, & qva tale omnium oculis ſiſti poteſt, dum omnia vel exactiſſima examina conſtanter ſuſtinebit.

§. VIII.

Probationem, quod productum per hanc operationem corpus regalinum nihil aliud ſit, qvam genuinum Zincum, exinde adſtruo: qvia in omnibus acidis cum efferveſcentia ſolvitur, qvia in Tigillo ſuper carbones candentes inflammatur, & in Flores albos dehiſcit, qvia cuprum convertit in aurichalcum; qvia Flores albi ſuper prunas colorem flavum ſulphureum adſciſcunt. Interim diſſimulare nolo circa ejus inflammationem, qvod inflammetur qvidem ut Zincum ſolet, ſed paulo tardius, & paulo majorem ignis gradum reqvirit, plane ut ejusmodi Zincum ſolet, qvod cum Mercurio amalgamatum fuerat, ut in Tractatu de Zinco adduxi, an forte per acidum Vitriolicum Terra Zinci condenſatur, ut phlogiſton paulo intimius imbibat. Quod ſi etiam immediate pulvis ex Vitriolo albo per oleum Tartari præcipitatus edulcoratusque (absqve inſtituta reductione) mox cum carbonibus & cupro ſtratificetur, cementetur & fundatur, prodit ſpecies aurichalci.

§. IX.

§. IX.

Qvi novit, qvod ex iisdem mineris ex qvibus Vitriolum album conficitur, ibidem ſimul etiam Zincum ipſum eliqvetur, is jam a priori ejus præſentiam hic hariolari potuiſſet; & qvi perpendit Zinci naturam maxime ſolubilem, qva præ omnibus aliis metallicis in omnibus acidis diſſolvitur, id etiam hic facile applicare potuit, prout & Celebr. D. D. Henckel in pyritolog. p. 904. adducit: amicum qvendum in medium protuliſſe: *annon circa generationem Vitrioli albi reflexiones ad Zincum vel potius Terram Zincinam dirigendæ ſint?* Et, qvod ſi D. Geoffroy, dum in vitriolo albo aliqvid lapide Calaminari æmulum ſuſpicatur, affinitatem vel potius identitatem qvandam Cadmiæ utriusque cum Zinco ſufficienter perſpectam habuiſſet, utique eo ipſo rem propius attigit, qvam D. Lemery, qvi cum ſua Aluminoſa Terra tam prolixe adſtructa jure meritoque hic exulat. Accedit his convenientia notabilis Vitrioli albi cum Floribus Zinci pro uſu ophthalmico. Cardilucius alicubi adducit, poſt deſtillationem Vitrioli albi in capite mortuo Mercurium currentem ipſi apparuiſſe, qvod ſi verum eſt, is absqve dubio per compoſitionem ex Zinco generatus fuit mediante flamma per rimas vaſis retorti dehiſcentis penetrante.

§. X.

Promta facilitas & certitudo hujus noſtræ Chymicæ demonſtrationis deducit me adhuc ad conſiderationem, qvod plerique circa ejusmodi ſcrutinia magnas difficultates ſibi

imaginentur tam qvoad prolixos labores qvam magnos ſumtus impendendos, ſi qvidqvam detegi aut erui debet, qva tamen in re ſæpiſſime falluntur, qvid enim hic ſimplicius & naturalius eſt, pauciſſimisque ſumtibus abſolvendum, quam præcipitare, edulcorare, reducere. Interim circa ipſam hanc noſtram materiam D. D. Trumphius Goslarienſis adeoqve in loco natali Vitrioli albi degens in Comercio literario Norinberg. Anni 1740. p. 210. refert: *Virum rerum metallicarum peritiſſimum & erudito orbi non ignotum* (forte D. Schlüter intelligit) *promiſiſſe ipſi inquiſitionem Terræ & metalli in Vitriolo albo per experimenta; ſed ipſum vereri, ut experimenta voto reſpondeant; ſibi vero ut & alii Viro celeberrimo, qui ad id exhortatus eſt, non vacare propter tempus & ſumtus impendendos, unde inquiſitionem hanc ad Londinenſem & Pariſinam Societatem Scientiarum remittit.* (Berolinenſem in auxilium non vocat, interim ex prædictis eluceſcit, ab hac ipſa Vitriolum hoc album longe clarius & dilucidius è tenebris in lucem protractum eſſe, qvam ab illis, idqve pauciſſimo ſumtu aliqvot groſſos vix ſuperante) ſuſpicatur porro etiam *ineſſe Vitriolo albo Saccharum Saturni*, & annotat, quod *hodie ab infectoribus copioſius coematur, unde jam quovis biennio imo frequentius conficiatur, concluditque anglos non potuiſſe imitari in anglia confectionem Vitrioli albi:* ſed ratio jam in promtu eſt, qvia ipſorum mineræ non continent hactenus Zincum. In hoc vero pleriqve deficiunt, qvod neſciant, qva ratione omnium optime labores inſtituendi ſint, ex defectu ſufficientis Theoriæ & experientiæ,

tiæ, &, qvo maxime reſpiciendum, qva via ingrediendum, ut citiſſime & certiſſime ſcopus attingatur, qvi characteres obſervandi &c. tum enim nec adeo difficiles nec adeo ſumtuoſæ erunt inqviſitiones.

§. XI.

Denique ex præmiſſis unusqvisqve facile perſpiciet; ſi cui Vitriolum album imitari & componere volupe fuerit, (qvamvis mediocre ejus pretium id hic vix ſvadeat, ſi ad ſumtus impendendos reſpexerit) ad Vitriolum Zinci & Vitriolum Martis primario eſſe reſpiciendum, idqve vel Zincum in Spiritu Vitrioli ſolvendo, vel Zincum cum Vitriolo Venereo ſoluto coqvendo: Cuprum forte melius omittitur, præcipue pro ſcopo interno, quamvis pleraqve ejus interna ordinatio ob vires adſtringentes & deſiccantes mihi ſit ſuſpecta. Me interim copia aliorum laborum impedit hanc materiam diutius perſequi, ſufficiat portam aperuiſſe & glaciem fregiſſe; unde reliqva curioſis philochymicis lubens relinqvo.

Num. V.

Ejusdem

Extractus ex literis

D. D. Sam. Benj. Cnoll.

Alcali nativum Indicum & Boracem præcipue concernens, tanquam reſponſio ad quæſtiones deſuper propoſitas.

TRansmiſſas qvod concernit qvæſtiones, eæ ex parte per ſe concident, dum hisce certiores facio; qvod Borax non ex hoc alcali nativo, ſed ex alumine præparetur, prout ex inſeqventi proceſſu apparebit, qvem mihi qvidam pro more Malabarico perquam doctus Bramanus, qui alchymiæ totus qvantus immerſus eſt, communicavit. Alcali noſtrum nativum habeo pro Nitro Veterum, nam omnia ea, quæ Barchuſen in ſua pyroſophia ex antiquis autoribus de Nitro veterum adducit, cum noſtro alcali exacte conveniunt. Ut autem ad quæſtiones aliquatenus ſpecialiter reſpondeam, ſequentia ſecundum relationem a Malabaris mihi hac de re communicatam refero.

Loca, in quibus alcali nativum reperitur, ſunt terra arenoſa & quaſi terra damnata, in qua nec arbores nec herbæ nec gramen creſcunt, nec ulla ibi veſtigia incendii ſubterranei aut combuſtarum urbium apparent. Colligitur vero

iſtud

iſtud 1) verſus Septentrionem 1½ milliare Malabaricum (NB. unum milliare Malabaricum tria germanica milliaria continet) a Tranquebar juxta Manſchneâkkal, Kidengel, Mâmâkùdi, Mandagakadtalli & Erùckantidtù, non prope ad mare. 2) Meridiem & occidentem verſus juxta Nandel ârrù fluvium, Waritſchu'k'udi, Tirùwadtakadi, Kôdtutſeri, porro in Càmboganam duorum dierum itinere in interiori regione a Tranquebar diſtans, quo in loco omnium optimum reperitur, 3) Meridiem verſus 1½ milliare Malabaricum a Tranquebar pone fluvium Wârſcheârù, Nódúngâdù, C'urùmbagaram, Ponbatti, Caſakùdi, Aur, in regione, circiter milliare unum Germanicum a mari, quorſum nulla aqua ſalina marina pervenire poteſt.

Modus, quo alcali hoc colligitur, eſt ſequens: cum tempus pulvioſum præteriit, proficiſcuntur ad prædictas ſteriles regiones, ibique conquirunt ea loca in quibus aqua pluvia in lacus collecta ſteterat, & poſtmodum exſiccata fuit, ibi reperiunt ſuperiorem terram dehiſcentem vel fiſſuras contrahentem; hanc terram deguſtant ut cognoſcant, an ſufficienter ſalita ſit vel non: quod ſi primum reſpondet, colligunt omnem ſuperiorem terram, tam profunde nempe, ac ea ipſis utilis apparet. Poſtea tres ſpatioſas foſſas, quarum altera ſemper poſt alteram ſita eſt, effodiunt, harum primam implent iſta collecta terra, cui aquam affundunt, eaque pedibus conquaſſando impaſtant, donec omnia bene commixta ſint, tum vero derivant hanc aquam in ſecundam foſſam, in qua

per

per aliquod tempus quieſcit, donec feces crudiores ad fundum ſeceſſerint, tum vero ſuperiorem claram aquam in tertiam foſſam derivant, ut in ea exſiccetur, ex qua poſtmodum repertum ibi alcali eximunt, & pro uſibus ſuis asſervant. Terra prædictarum regionum ſalino urentem ſaporem præbet, idque non tantum in ſuperficie, verum id etiam quod profundius eruitur. Et quamvis hoc anno alcali hoc in iis locis collectum fuerit, tamen inſequenti anno præterlapſo tempore pluvioſo in iisdem locis denuo reperitur. Quod prædictum alcali non oriatur a Sale communi in Sole calcinato, ex ſequentibus concludere licet: 1) Nullum hic indicium occurrit, quod Sol adeo potens exiſtat, ut Sal commune alcaliſare poſſet, imo nequidem Vegetabilia incinerare valet 2) Tale quid non in interiori regione, ſed multo magis hic prope Tranquebar, ubi terra extreme Salina & ubivis Herba Kali geniculata impleta eſt, & multum Salis communis quoque conficitur, reperiretur 3) Neceſſum foret, ut veſtigia Salis communis alcali noſtro intermixta reperirentur, cum tamen, ſi illud ſolvitur filtratur & in Sole cryſtalliſatur, potius parvæ cryſtalli quoad figuram & ſaporem Nitro vulgari ſimiles, inveniantur. Equidem negare non poſſum, quod aliquando, arenam iſtam non procul a Tranquebar reperibilem (ex qua alcali, ut ſupra memoravi, conficitur) aqua elixaverim, & mediante Sole evaporaverim, in qua paucas quasdam cryſtallos Sali digeſtivo Sylviano plane ſimiles reperii: Ex hoc vero concludo, quod alcali hoc acidum

Salis

Salis communis accidentaliter attraxerit, quia locus prope ad mare ſitus eſt, unde etiam hæc arena propterea a Malabaris parvi æſtimatur. Noſtri Malabari ex hac Terra alcalina & calce viva conficiunt lixivium cauſticum, quo cum pannos ſuos (Cattune) lavant, & paucis horis ſimul dealbant. Odor qui per additionem calcis exoritur, non eſt Salis volatilis urinoſi, ut Barchuſen exiſtimet, ſed eſt lixivioſus.

Ratione Zinci Indici nihil certi memorare poſſum, quia illud in noſtra vicinia non præparatur.

Ratione Nitri Indici vero in his circumſtantiis impoſſibile eſt quicquam comperire: equidem non procul a Porto novo reperitur Nitri coctura; verum eximia hæc urbs negotiatoria præterito anno per incurſionem Maratiorum miſere devaſtata eſt: & fama jam increbeſcit, quod iidem cum 12000 equitibus contra Mahometanos in via ſint, nam eorum præcurſores jam quædam non procul a nobis diſſita loca Mogulica diripuerunt.

Per novem menſes laboravi febre quartana, & a paucis retro diebus vix tantum virium recuperavi, ut has literas exarare valuerim. Quod ſi Deus ſanitatem denuo largietur, animo induxi Malabaricum Chymicum ad me vocare, cujus ope non tantum proceſſum Boracis, ſed & alia quædam, de quibus jam taceo, tentare, & quodſi ea vera repererim, probas earum rerum ad Illuſtrem Scientiarum Societatem transmittere decrevi. Bramani videntur nonnulla adhuc de Ægyptiorum ſapientia poſſidere, interim dolendum

eſt, qvod ipſorum libri in Kirendica, hoc eſt Deorum lingva conſcripti ſint, quam tantum doctiſſimi inter ipſos intelligunt &c. Dabam Tranquebar in oris Maritimis Choromandel d. 10. Jan. 1742.

Præparatio Wāngâram ſeu Boracis ex Malabarico translata ſequitur.

Recipe 5 libras Padi-kâram ſeu Aluminis, easque immitte in terreum Panella ſeu Ollam terream.

3. Padi ſeu Medide (Menſura una continet unum Medide) de lacte arboris Sadira-Kalli immittuntur in Sadti vel Triſſella.

NB. Sadti vel Triſſella eſt ſpecies patinæ profundioris. Arbor Sadira Kalli reperitur in Horto Malabarico Part. II. figura 42, & ibi Schadida calli appellatur.

Jam 3 palam vel ad pondus 30 pagodarum recipitur de cortice Pulien Kodtei vel Nuclei de Tamarinha, alias Fructus Tamarindorum vocantur, poſtquâm ea in Sole bene ſiccata & ſuper lapidem conquaſſata fuere, & in lac arboris Sadira-Kalli immittitur. Tum cum viridi ramo vel baculo arboris Margos utrumque circiter horam unam jugiter circumrotatur & commiſcetur: hac ratione omnis impuritas, quæ in lacte eſt, baculo iſti arboris Margos adhæreſcit.

NB. Arbor Margos eſt communis arbor, cujus folia amara ſunt guſtu. Lac vero arboris Sadira-Kalli eſt vehemens cauſticum, & plane alcalinus liquor eſſe videtur, colore albo, & pingue, quaſi optimum lac vaccinum

ſi tum

ſi tum prædicta impuritas eximitur, Lac iſtud evadit ut aqua, (puto ab acido Tamarindorum iſtud præcipitari) in hanc aquam immittitur $\frac{3}{4}$ Padi ſeu Medide Nal-onnei, quod denuo cum baculo Margos jugiter circumagitatur.

NB. Nal-onnei hic locorum oleum ſeſaminum appellatur. Hoc facto omnia infunduntur in Panella, cui alumen immiſſum fuit, & Panella tamdiu concutitur, donec omnia ingredientia ad fundum ceciderint, & aqua ſuperne ſtet. Tum Panella hæc cum Triſſela bene contegitur, & in foſſam, quæ dimidiam viri ſtaturam æquat, defoditur, & quidem non in ædibus, ſed tali loco, quo lux Solis per plurimum diei tempus pertingit, in eoque per ſex menſes relinquitur, & quidem calidis menſibus, non vero pluvioſis, & ne quis locum hunc conculcet, in quo Panella jacet, eamque confringat, lapides quidam ſuperne in circuitu collocantur. Poſt 6 menſes ſi foſſa aperitur, Borax fruſtulatim in Panella jacet.

NB. Unum Palam eſt paulo plus quam 1 uncia,
nam 14. Palam conficiunt unam Libram.

Num. VI.

Andreæ Sigismundi Marggraf,

Nonnullæ novæ methodi Phosphorum ſolidum tam ex urina facilius conficiendi, quam etiam eundem promtiſſime & puriſſime ex phlogiſto & ſingulari quodam ex urina ſeparato Sale componendi.

§. I.

EQuidem præparatio curioſi hujus producti chymici, & a quo forte futuris temporibus etiam fructus exſpectari poterunt, non adeo ignota; dum nonnulli & quidem non ſine fundamento diverſas ejus parandi methodos communicarunt: Verum nimia producti paucitas plerosque impedivit eis diu immorari, ita ut Dom. Hanckwitz Londini ad hoc usque tempus unicus fere fuerit, qui id curioſis divendidit, dum tantam producti hujus copiam nemo alius hactenus aſſequi potuit.

§. II.

Hæc res jam ab aliquot retro annis, & ſimulac hoc præparatum prima vice oculis uſurpaveram, me impulit, ut ei diutius immorarer, & inveſtigarem, qua ratione id etiam a me in copia parari, & ad inſtituenda cum eo diverſa curioſa

rioſa

rioſa tentamina tam chymica, quam phyſica, tam a me ipſo adhiberi, quam aliis etiam, quos magnitudo pretii hactenus deterruerat, occaſio dari poſſit, id ipſum pro mediocri pretio comparandi & præparandi.

§. III.

Jam anno 1725. antea, quam a patre meo doctiſſimo & celebri Conſiliario Neumanno tam pro addiſcenda Chymia, quam pharmacia committerer, ipſum ex 3. partibus arenæ lapicidarum groſſe contuſæ & 1. parte urinæ ad conſiſtentiam extracti evaporatæ confeceram, & feliciter abſolveram; Cum vero apud prædictum D. Neumannum occaſione lectionis, quam de Phoſphoro habebat, diverſis proportionibus & immutationibus, quas tum temporis ipſius juſſu inſtituebam, illud perſequerer, evenit tamen, ut nulla alia ratione, quam ante memorata tum temporis ad finem propoſitum venire potuerim; & cum circa hæc diverſas difficultates, nec non illam producti paucitatem animadverterem, præcipue vero intenſum illum ignis gradum, quem per 7 horas continuabam, non mirum erit, quod tum ab ulterioribus phoſphori parandi tentaminibus deſtiterim, & quoad tempus quoddam in his acquieverim.

§. IV.

Circiter annum 1734 bona fortuna mihi obtigit, ut informatione celeberrimi & accurati D. Conſiliarii metallici Henckelii Freybergæ fruerer, a quo in chymicis & metallurgicis proficere dabatur, ubi inter varios diſcurſus de

Phoſphoro ejuſque caritate ſermones miſcebamus: cum ipſe mihi aſſeveraret, ſe eum aliquando plane fortuito, cum in labore Mercurificationis occuparetur, facile & minori igne elaboraſſe, quam methodum quoque in pyritologia ſua jam adduxerit; Inquirebam proinde locum, & reperiebam ibi in ſpicilegio pag. 1004. §. 14. ſequentia verba: *Calx Saturni cum Sale armoniaco, Sale Tartari & urina veteri digeſta, & tandem deſtillata dat odorem arſenicalem, & tandem pulchrum phoſphorum.* Cum ergo ex ſincero hoc viro de proportione reliquisque circumſtantiis hujus loboris quæſiviſſem, recolebat in mentem tam præparationem calcis plumbeæ, quam proportionem aſſumtam, & referebat utraque, ut & quæ præterea circa hunc laborem ipſi in memoriam redibant.

§. V.

Proinde calcem Saturni, qualis ad hoc opus requiritur, ipſius ſuaſu ſequenti modo conficiebam: Recipiebam patinam ferream (quanquam etiam patina terrea plana ex commoda argilla parata inſervire queat) in hac libram 1. plumbi liqueſcebam, ut mediocriter candeſceret, huic injiciebam Sal commune fuſum & pulveriſatum cochleatim & ſenſim ad 2 libras ſub perpetua agitatione, donec omne plumbum in cineres flavos converſum eſſet; Totam maſſam ſubtiliter conterebam, eluebam, & aqua calida optime edulcorabam, denique ſiccabam calcem, cujus plus quam 1 libram recepi.

§. VI.

Calcis hujus tenerrime contritæ ſumebam 1 libram, miſcebam

cebam cum 1 libra Salis armoniaci & 1 libra Salis Tartari, mixto huic in vitro evaporatorio immiſſo affundebam urinam putridam ad eminentiam 4 digitorum transverſorum (urina per 6 hebdomades in putrefactione ſteterat) idque leni digeſtioni in arena calida exponebam, quotidie aliquoties circumagitando, reaffundendo etiam quotidie tantum urinæ, quantum evaporaret, idque per 14 dies continuabam, demum vero ad conſiſtentiam maſſæ friabilis exſiccabam.

§. VII.

Siccam hanc & friabilem materiam immiſi retortæ terreæ Waldenburgicæ, quæ menſuram unam circiter capiebat, hanc adaptabam in furno ex meris lapidibus muralibus exſtructo, qui inferius ferrea craticula inſtructus erat, indeque abſtrahebam phlegma, ſpiritum urinoſum, ſal volatile & oleum, poſtea novum recipientem adaptabam, aqua ſemiplenum, ſicque adhibito ſuperius & inferius igne fortiſſimo, ita, ut retorta perfecte candeſceret, poſt aliquot horas pulchrum phosphorum acquirebam, licet non adeo copioſe.

§. VIII.

Quamvis autem id, quod quærebam, hac ratione feliciter acquirerem, tamen his contentus eſſe non poteram, quia additio ſalis armoniaci & ſalis Tartari pretioſior videbatur, unde varias adhuc probas inſtituebam, ex quibus ſemper eluceſcebat, quod additio Saturni ad urinam utique conduceret, & cum animadverterem, quod circa hæc tantus ignis gradus & tam longum tempus non requireretur, non potui

non,

non, quin poſt diverſas inſtitutas probas etiam ſequentes tentarem.

§. IX.

Poſtquam ex diverſis exiguis tentaminibus advertiſſem, quod Saturnus cornuus ſeu Calx plumbi cum acido Salis combinata utilior ſit, quam ea calx, qualem ſuperius deſcripſi: quamvis negari non poſſit, quod etiam hæc per calcinationem cum ſale parata calx Saturnina aliquid hujus acidi aſſumſerit; Quia vero etiam hic modo ordinario paratus Saturnus cornuus propter copiam aquæ fortis carior videbatur, ut & propter prolixitatem tædioſior, hinc allaborabam, qua ratione acidum Salis ex alio paulo viliori corpore cum plumbo uniri poſſet. Unde recipiebam 2 libras ſalis armoniaci pulveriſati, quas commiſcebam cum 4 libris Minii, mixturam immiſi retortæ vitreæ & per gradus abſtrahebam ſpiritum urinoſum perquam penetrantem, caput mortuum erat valde fragile, aliquanto puniceum, & ponderabat 4 libras & 8 uncias (de hoc ſpiritu id tantum adducere volui, quod Lunam cornuam in frigido diſſolvat) ſicque acquirebam perpulchrum & acido ſalis ſaturatum plumbum, quod pulveriſatum pro uſu aſſervatur.

§. X.

Jam recepi urinam putridam, quæ per 8 hebdomades computruerat, in notabili quantitate, circiter amphoram unam & dimidiam, hanc evaporabam ad conſiſtentiam ſpiſſæ mellaginis: Hujus recepi circiter 9 vel 10 libras (ponderis civilis

vilis ad uncias 16) eique in aheno ferreo ſuper carbones calefactæ per vices immiſcui agitando 3 libras iſtius Saturni cornui §. 9 memorati una cum libra dimidia carbonum pulveriſatorum, evaporabam mixturam ſub continua agitatione, donec plenario in pulverem nigricantem faceſſeret.

§. XI.

Hoc adimplebam retortam vitream proportionatam, præpoſitoque recipiente per gradus deſtillabam, donec retorta obſcure candeſceret, ita tranſibat adhuc pauca portio ſpiritus urinoſi & ſublimati ammoniacalis, reſtitante demum puro & omni ſuperfluo oleo & ſale volatili órbato fragili capite mortuo.

§. XII.

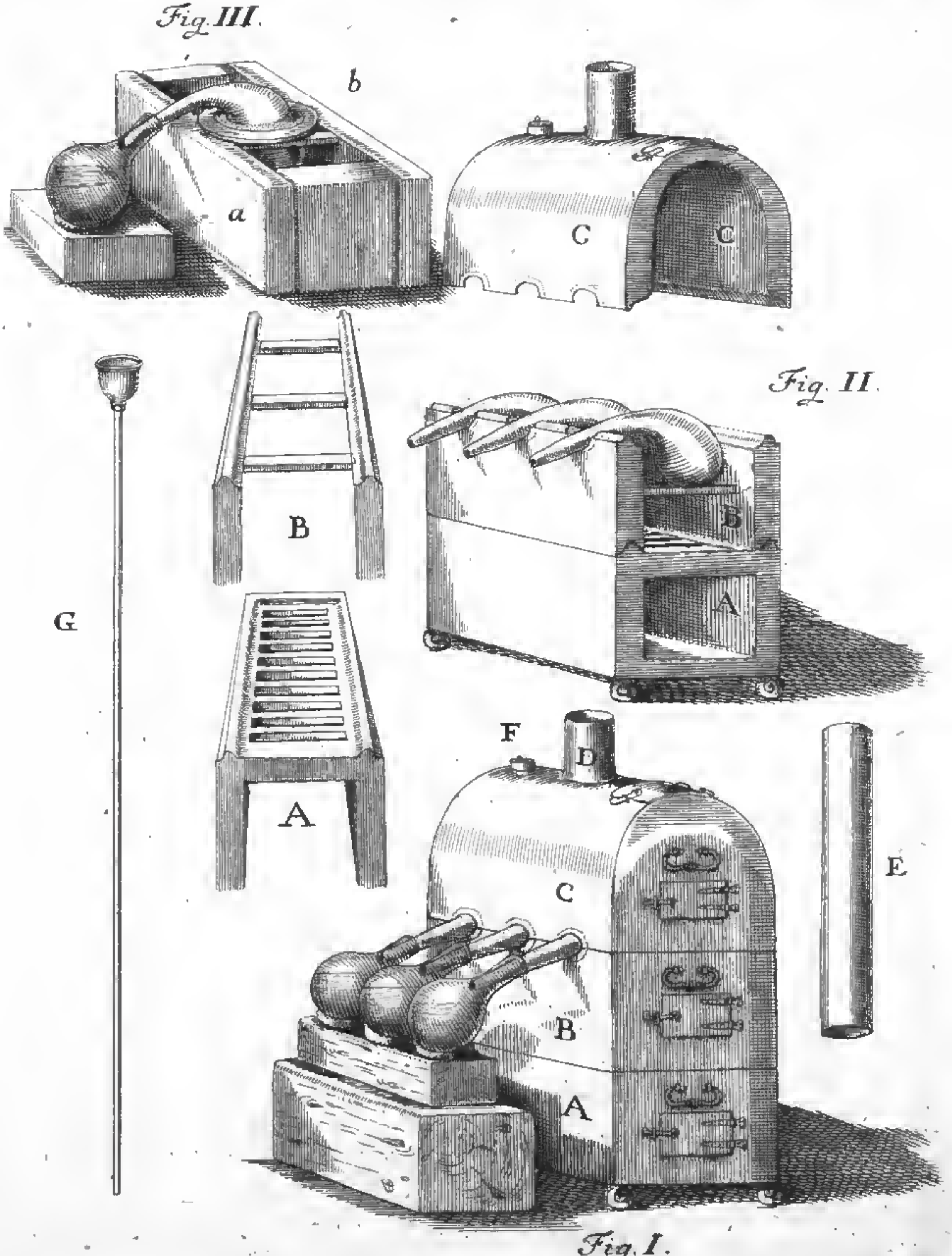
Hoc caput mortuum denuo conterebam, ut bene miſceretur, ejusque tantum, quantum intra duos digitorum cuſpides contineri poteſt, lucide candentibus prunis inſpergebam, unde extemplo odor arſenicalis & coerulea undulans flamma emergebat.

§. XIII.

Tum vero recipiebam 6 parvas terreas & limo ſuperinductas Retortas, quarum quævis circiter 18 uncias aquæ capiebat, tales vero ſunt in ſpecie Waldenburgicæ, nec non, quæ prope Kirchhan in ditione Saxonica formantur, item in caſu neceſſitatis ipſæ Kirchhanenſes. Has adimplebam hac materia ad $\frac{3}{4}$, casque imponebam furno hic ſub litera A. deſignato, cuique retortæ adaptabam recipientem, qui circiter *Tab.VI.*

 men-

Tabula VI.



menſuram aquæ continere poteſt, quem paulo plus, quam dimidio aqua impleveram, ita ut aqua mox fere cuſpidem colli retortæ attingeret, reliqua vero pars fere dimidia recipientis vacua manebat, commiſſuras elutriato limo lutabam, tum per gradus deſtillabam, primo per 1 horam igne leniori, ita ut retortæ ſenſim incaleſcerent, augebam poſtea ignem per horam dimidiam, donec carbones retortas attingerent, continuabam ſenſim, donec carbones dimidiam retortæ partem adæquarent, idque per horam dimidiam, & per dimidiam horam usque ad culmen retortarum: tum vero phosphorus in vaporibus apparebat, unde tum ignem etiam ſuperne, quantum fieri poterat, adaugebam, ita ut omnia canderent, totumque furnum carbonibus adimplebam, ex quo tandem guttatim prodibat, ſicque continuabam adhuc per horam unam & dimidiam, in quo tempore omnis phosphorus ſub forma exiguarum guttarum in propoſitam aquam decidebat; adeoque totus labor ad ſummum 4½ horis abſolvitur, qui etiam, ſi ignis regimen paulo acceleretur, ſolis 4 horis optime perfici poteſt.

§. XIV.

Omnibus & ſingulis refrigeratis recipientes removebam, aquam ſuperfluam effundebam, & ex reſidua perpulchrum phosphorum glacialem acquirebam.

§. XV.

Qvoniam autem parvas retortas aſſumſeram, hinc in hoc furno non niſi tres earum tractare poteram. Quod ſi vero

ſecun-

ſecundum juſtam proportionem furnus hic ampliatur, tota proportio una vice tractari poſſet, cum in hoc duabus vicibus imponenda fuerit. Quod vero hic parvas retortas majoribus præferam, id ex duabus præcipue rationibus fit: primo, ſi per aliquod infortunium earum quædam fiſſuras contraheret, tamen reliquæ ſalvæ manerent, unde tantum damnum non emergeret, quam ſi in unico vaſe omnis maſſa contineretur, quæ ſi dehiſceret, tum omne periret: Secundo, quia vaſa minora facilius ab igne penetrari & candeſcere poſſunt.

§. XVI.

Proinde reliquas tres retortas itidem imponebam, & procedebam eadem ratione ut §. 13. & 14 recenſui, ſicque adipiſcebar phosphorum ſatis elegantem, niſi quod paulo impurior eſſet, dum hinc inde gryſeus & nigricans appareret; Ut ergo eum ad juſtam elegantiam & puritatem reducerem, ſequenti modo proceſſi, quod rectificationem ſeu depurationem appello.

§. XVII.

Recipiebam ergo puram retortam vitream, quæ circiter 8 Uncias in ventre capiebat, qvæqve proportionato ſpatioſo collo prædita erat, quod circa exitum præcipue non ſit nimis anguſtum vel acuminatum. Hujus retortæ partem dimidiam implebam aqva frigida, phosphorum impuriorem conſringebam in fruſta minora, ita ut ea commode in retortam injicere poſſem, iis omnibus injectis ſuperfluam aquam

 per

per curvaturam colli retortæ effundebam, moxque applicabam recipientem vitreum, aqua ita adimpletum, ut roſtrum retortæ paulo ſuper aqvam divergat, ita tamen, ut aqva, poſtquam omnis phosphorus transpulſus fuerit, collum retortæ ingredi non poſſet; Retortam hanc imponebam capellæ, vide figuram III., arena impletæ, recipientem claudebam accurate mediante luto ordinario ex farina & aqva, poſt leni primum igne transpellebam aquam reſiduam, phosphorus vero ſimulac incaleſcit, mox incipit liqueſcere, & ſubter aquam mergi, transpulſa vero aqua, mox phosphorus ipſe aſcendit, ita quidem, ut primum in collum retortæ ſublimetur ſub forma minutorum globulorum, qui copioſe & cito colliguntur, tum auxi gràdum ignis, unde hæ guttæ colliguntur, & in forma majore in præpoſitam aquam delabuntur, ignem tamdiu continuabam, donec nullæ guttæ amplius apparerent, & retorta demum canderet, ſicque acquiſivi elegantem, omni impuritate orbatum, candidum, & glaciei inſtar diaphanam phosphorum.

§. XVIII.

Igne demum extincto & vaſibus perfecte refrigeratis, dimovebam recipientem, & cum in collo retortæ adhuc quædam granula adverterem, proinde collum retortæ mox aquæ frigidæ immergebam, ne aër accedere poſſet, partem retortæ poſteriorem decutiebam circa initium colli, cui mox aquam frigidam affundebam, & granula in collo adhærentia

cum

cum forti filo ferreo decutiebam, eumque addebam Phoſphoro iſti, qui in recipiente aſſervabatur.

§. XIX.

Cum autem ſuperfluam aquam declinatione ſeparaſſem, effundebam Phoſphorum, qui in recipiente continebatur, in vas vitreum ampli colli, cui aqua frigida inerat, imo & frigidam adhuc affundebam, ita ut 2 digitos transverſos ſupereamineret, tum vero imponebam in aquam tepidam, ſenſimque admiſcebam aquam calidam, donec omnis Phoſphorus liqueſceret, tum ſivi refrigerare, qvod additione aqvæ frigidæ accelerabam, ſicque adeptus ſum pulcherrimum Phoſphorum, qualis unquam confici poteſt, & quidem pondere 2 ½ Unciarum.

§. XX.

Huic porro ut debitam figuram conciliarem, eamque in oblongos minutos cylindros redigerem, curabam fieri canalem vitreum ſuperne cum figura infundibili, vide Figur. G. longitudine circiter pedem unum & dimidium & ultra, amplitudine quaſi mediocris calami anſerini, hujus foramen inferius obturabam ſubere, hunc ita præparatum canalem immittebam aquæ calidæ, quacum etiam ipſum fere totum adimplebam, eique poſtea Phoſphorum in parva fruſtula confractum unum poſt alterum in hoc infundibulum injiciebam, qui inde mox liqueſcebat, & in oblongum anguſtum canalem defluebat; canali hoc ſupra dimidium eo repleto, eximebam eum ex aqua calida, jamque eum aquæ frigidæ immittebam, & cum omnia refrigerata fuere, invertebam

ſuperiorem canalis partem inferne in vitrum amplum cui frigidam immiſeram, obturaculum ſubereum a parte inferiori removebam, & filo ferreo comprimebam phosphorum jam rigidum redditum, ut ex parte ſuperiori jam ſubtus inverſa excideret in frigidam ſuppoſitam, unde poſtea exemtum in aliis vitris aqua repletis aſſervavi.

§. XXI.

Hac ergo ratione conſecutus ſum phosphorum, qui elegantia & puritate nulli unqvam cedit; interim nec hoc ego contentus eſſe potui, ſed quærebam adhuc plures etiam quodammodo pretioſiores methodos, quos poſthac adducam, quamvis tamen circa omnes meos labores adhuc usque ad ulteriorem experientiam hanc methodum tanquam optimam commendare poſſim.

§. XXII.

Furnus, quo in deſtillatione phosphori uſus ſum, ex ferreis laminis eſt fabrefactus, & ex tribus partibus conſiſtit, vide Figur. I. & II. quarum quævis in medio ferreis baculis munita eſt, ita ut reliquæ partes ſuper eis quieſcere poſſint. Pars ejus inferior, in qua cineres & foramen cinerarium continetur, A. A. A. altitudine 4 pollices complectitur, latitudine 9 pollices, longitudine pedem unum & 6 pollices, & porta 4 pollices in amplitudine & altitudine. Pars altera, qvæ verſus partem inferiorem aliqvatenus coarctatur, ita tamen, ut cum A. commode jungi poſſit, altitudine ſiſtit 9–10 pollices, qvorum 7–8 pro retortis inſerviunt, quæ

ſuper

ſuper ſuis ſuſtentaculis ferreis B. B. B. a craticula tantum diſtant, & 2 pollices pro foramine, ex qvo colla retortarum emittuntur. Pars ſuperior, qvæ continet copulam C. C. C. itidem ex ferreis laminis conſtat, ita ut parti mediæ juſte accommodari poſſit, & colla retortarum non comprimat, unde & in hac aliquot foramina exſecantur, quæ poſtea ſub operatione limo clauduntur, ſuperius eſt fornicata, & in medio àd caminum usqve 7 pollices alta. (Furnus interne obducitur luto ex p. 2. Limi & p. 1. arenæ) Caminus D. 7 pollices eſt altus & 2$\frac{3}{4}$ latus, hic itidem obturaculo inſtructus eſſe poteſt, qvod, poſtqvam retortæ fere mox candent, removetur, unde, ſi tum parvum foramen .F. occluditur, igni vehementior vis per aërem conciliatur, qvæ poſtea, ſi canalis ferreus .E. (cujus longitudo per aliqvot pedes aſcendere poteſt) imponitur, tanto magis adaugetur. Prope caminum D· ſuperne in copula porta inſerta eſt, qvæ aperitur, cum carbones injiciendi ſunt, ſic qvoqve ad latus fornicis porta eſt, ut per eam, ſi aperitur, carbones ferreo bacillo deprimi qveant. Porta media in media furni parte collocata inſervit pro immiſſione carbonum in principio operationis, poſtea vero tantum interdum aperitur, ad proſpiciendum, an carbones ſuperne injecti recte delabantur? Eo præprimis reſpiciendum, ut furnus carbonibus ſemper impletus ſit, adeoqve retortæ pleno igne perfecte circumdentur. F. denotat adhuc foramen exiguum pro aëre prope caminum D., qvod, cum retortæ bene candent, obturaculo

ferreo

ferreo clauditur, hujusque loco caminus D. aperitur. G. eſt Vitreus oblongus canalis ſuperne infundibulo inſtructus, in qvo phosphorus prægreſſa rectificatione in parvos cylindros efformatur. Figura III. hic monſtrat a. b. 4 lapides murales, inter quos ſuper duobus ferreis baculis capella terrea arena repleta collocatur, lapides inferius habent craticulam, in arena vero capellæ imponitur retorta cum phosphoro impuro præpoſito recipiente, aqua ad dimidium adimpleto: Apparatum hunc applico pro rectificatione phosphori (quamvis etiam ordinaria muro incluſo capella ferrea idem efficere poſſet) & carbones ſuperne prope capellam injici debent.

§. XXIII.

Adduxi ſuperius §. 20, quod eximium phosphorum beneficio calcis Saturninæ cum acido Salis combinatæ conſecutus fuerim; interim non poſſum non, quin adhuc alia additamenta in medium proferam, quæ, quamvis meliora non ſint, tamen prioribus parum cedunt, e. g. Cadmia illa fornacum, quæ tanquam flavum ſublimatum Freybergæ furnis altis fuſoriis ſub labore minerarum crudiorum adhæreſcit, & quæ jam per ſe, ſi in loco tenebroſo unguibus fricatur, leni hoc motu ſcintillas rubicundi luminis disjicit, prout & doctiſſimus & experientiſſimus Conſiliarius metallicus Henckel hujus Cadmiæ jam in Pyritologia ſua pag. 546. 547. 548 mentionem facit. Hæc enim non tantum, prout omnis alia vera Cadmia, cuprum reddit flavum, verum etiam, cum ea, ut & pleræqve ejus generis aliæ, cum octava parte pulveris

carbo-

carbonum commiſcetur, & ex retorta terrea in præpoſitam aquam vehementi igne tractatur, bonam quantitatem Zinci refundit. Hanc, inquam, Cadmiam pulveriſatam ad 4 Uncias commiſcebam cum 8 unciis urinæ inſpiſſatæ, abſtrahebam inde phlegma, Sal volatile & Oleum, poſt recipientem aqua imbutum præponebam, & igne fortiſſimo deſtillatorio urgebam, tum ſimiliter elegantem Phosphorum nanciſcebar, ſimul vero in collo Retortæ flores rubicundos cuſpidatos, prout eos, quos in Miſcellaneis Berolinenſibus ultimis ſub experimentis cum Phosphoro pag. 56. adduxi.

§. XXIV.

Cum porro ex prædictis experimentis concluderem, quod acidum ſalis communis ſub forma concentratiori multum contribuat; proinde recipiebam unciam unam Lunæ cornuæ, & putrefactæ inſpiſſatæque urinæ 1½ Unciam, mixturam deſtillabam, transgreſſisque phlegmate, ſale volatili & oleo, præponebam alium recipientem, aqua impletum, & recipiebam ſimiliter ſatis pulchrum Phosphorum. Cum vero etiam conſiderarem, quod pura urina per ſe aliquid Phosphori largiatur, quamvis non in tali quantitate, ac ſi cum prædictis materiis commiſcetur, hinc volui tentare annon etiam absque urina ex aliis materiis idem fieri poſſet? Varia proinde inſtituebam tentamina, præcipue, cum in ea opinione firmiter verſarer, quod acidum Salis concentratisſimum eadem facilitate cum phlogiſto uniatur, quam acidum Vitrioli in ſulphurificatione ſolet, unde ſequentia inſtitui experimenta.

§. XXV.

Miſcebam Lunæ cornuæ unciam ſemis cum portione anatica carbonum, & mixturam igne fortiſſimo deſtillabam, ſed nihil Phosphori exinde recepi.

§. XXVI.

Poſtea recepi eum Saturnum cornuum, quem §. 9. deſcripſi, eumque commiſcebam cum 3 unciis Olei Cornu Cervi foetidi, abſtrahebam ad ſiccitatem, caput mortuum denuo commiſcebam cum uncia dimidia pulveris carbonum, deſtillationem ex Retorta terrea igne intenſo in præpoſitam aquam inſtituebam, imo non levis portio tranſtillabat, verum non erat Phosphorus, ſed novum quid, nempe plumbum volatile redditum, ſeu potius Saturnus cornuus volatiliſatus. Exinde eluceſcit, quid Phlogiſton efficere poſſit, ſi Metalla prius acido Salis combinata ſunt, prout & hoc experimentum mihi poſtea ſæpius ſucceſſit; ſi tantummodo ſolos carbones pulveriſatos cum Saturno cornuo miſcui, & forti igne deſtillavi, & hoc experimentum ulteriori inquiſitione dignum eſt, cum alias quoque pluribus vicibus per additum Phlogiſton regulus Antimonii, imo plumbum commune, & ſtannum in collum Retortæ ſub forma metallica eadem ratione transpulſum fuerit, ac §. 23. adductum reductum Zincum.

§. XXVII.

Sic etiam tam cum Oleo Cornu Cervi, quam cum Oleo Tartari & additione arenæ & Salis communis Phosphorum efformare quæſivi, ſed utrobique ne veſtigium quidem ejus adipiſci potui.

§. XXVIII.

§. XXVIII.

A nonnullis excrementa humana, ut & ſanguis commendata reperiuntur, ac ſi pro præparatione Phosphori utilia forent; Dubito vero, quod plus ad id contribuant, quam alii carbones; ſiquidem omni licet adhibita opera nec ex excrementis, nec ex ſanguine quicquam ejus acquirere potui; Interim non dubito, quod ad hæc idem contribuere poſſint, quod additio carbonum ligneorum præſtare ſolet.

§. XXIX.

Recepi porro varii generis carbones ligneos, Sal commune & arenam albam: Saturnam cornuum, Sal commune, arenam & carbones: Sanguinem ſiccatum, arenam & Sal commune: Sanguinem ſiccatum & arenam: Sanguinem ſiccatum & ſaturnum cornuum, & has commixtiones methodo ſupra memorata pro Phosphoro deſtillavi: Simili ratione Sal armoniacum fixum differenti modo alia vice cum ſanguine, alia cum carbone vegetabili, aliis item additamentis miſcui, & deſtillationi commiſi, verum nihil recepi. Argillæ albæ libra ſemis cum ana Extracti Urinæ mixta & methodo conſueta elaborata vix veſtigium ſuppeditavit: Ex Unciis 4 fuliginis tædæ in occluſo candefactæ, unciis 6 ſalis, totidemque arenæ itidem nihil recepi. Unde mihi adhuc dubium reſtat, an acidum Salis concentratum ita crude, ſi cum phlogiſto combinetur, id acidum exiſtat, quod cum prædicta terra inflammabili Phosphorum conſtituat: quanquam proinde id non plane negem, nimirum, quod ſi illud antea cum tenera terra

vitreſcibili exactiſſime unitum, adeoque fere plane immutatum fuerit; qvod ex ſequentibus magis eluceſcet; Imo forte, ſi Deus vitam & ſanitatem largietur, adhuc clarius, non ex cogitatis, ſed ex veris experimentis demonſtrari poſſet.

§. XXX.

Animadverteram in differentibus inquiſitionibus, quas propter Phosphorum circa urinam inſtitueram, ſpeciem illam Salis, qvæ jam per aliqvod tempus non ignota eſt, ſatis curioſa, & adhuc vix ſufficienter inveſtigata, tenere fuſibilis ex urina, qvæ plane ſingulariter ab aliis differt, & cujus urina forte plus qvam unicam ſpeciem continet, quæqve acquiritur: ſi bona Urinæ quantitas ad conſiſtentiam levis Syrupi inſpiſſatur, & inſpiſſatum præcipue hyeme in loco frigido vel cella reponitur, tum enim in ſingulares cryſtallos coit; in genere vero ejus præparationem Celeber. Boerhaven in Elementis Chym. Tom. II. p. 317. Proceſſu XCVIII. clare præſcripſit; Qvod, inqvam, hoc Sal, ſi illud antea ſeparaveram, reſtantem Urinæ maſſam ita diſponat, ut longe minus Phosphori largiatur, ac alias, ſi illud non ſeparaſſem: Hæc experientia eo me redigebat, ut bonam ejus portionem colligerem, eamqve optime depurarem & ad ſeqventia tentamina adhiberem.

§. XXXI.

Recepi Salis hujus depurati (qvod præterea mihi videbatur qvodammodo convenire cum ſale iſto, qvod a me in Miſcellaneis his Tom. VI. p. 61. ſub Titulo: Relatio acidi Phosphori verſus Sal alcali volatile adductum eſt) unciam unam,

nam, idqve commiſcui cum uncia albæ arenæ tenerrime contritæ, & 2 drachmis teneræ fuliginis tædæ, in occluſo candefactæ, mixturam immiſi parvæ proportionatæ retortæ terreæ, eamque inter lateres ita diſponebam, ut intenſum, imo fortiſſimum ignem adhibere poſſem; abſtrahebam primo ſpiritum urinoſum, poſtea præponebam recipientem aqva impletum, eumqve luto claudebam ex limo, & fortiſſimum ignem ſubminiſtrabam, ita prodibant primo lucentes vapores, & in collum. Retortæ adhærebant parva granula, quæ tandem in guttas concrelcebant, & in propoſitam aquam decidebant, & poſtquam per integram horam ignem continuaſſem, refrigerari paſſus ſum, & poſtea in ſemoto recipiente inveniebam pulcherrimum & puriſſimum Phosphorum pondere circiter drachmam ſemis.

§. XXXII.

Facile hoc experimentum, quodque mixtionem fundamentalem phosphori clarius illuſtrat, non poterat non mihi gaudium excitare: propterea extemplo, quia credebam, quod tenera arena cum terrea ſalis urinæ fixi portione ſeſe uniret, & exinde ejus acidum liberaret, aliud experimentum inſtituebam, & unciam ſemis hujus ſalis urinæ fixi, vel ut eum Bœrhaven appellat, ſalis nativi urinæ cum 2 drachmis teneræ peruſtæ fuliginis miſcebam, & priori modo deſtillabam, & ecce, acquirebam plane ejusmodi pulchrum & in guttis tranſeuntem phosphorum. Reflexiones meas circa hanc ſubitaneam luminis & ignis geneſin ex aqua, terra te-

nera & phlogiſto ad aliud usque tempus ſuſpendo, reiteratas experientias expectans. Interim cuique ſedulo naturæ indagatori hoc experimentum ulterius conſiderandum & expendendum propono: præprimis cum ejusmodi ſalinam ſpeciem in vegetabilibus præſumam, quia hæc eadem ratione, licet non tam copioſe, hoc productum ſuppeditant, & quia talia quotidie in nutrimentum nobis veniunt, inde ſuſpicari licet, quod ex his ſal hoc originem ſuam trahat.

Non poſſum non hac occaſione experimentum adducere, quo certior redderer, an copioſum acidum ſalis in cruda ſua & concentrata forma ad majorem phosphori quantitatem producendam contribuat?

§. XXXIII.

Recipiebam unciam dimidiam Lunæ cornuæ, commiſcebam hanc cum uncia dimidia ſalis fuſibilis fixi urinæ, ſcilicet iſtius urinæ ſalis, qvod §. 30. adduxi, & unciam dimidiam ſuliginis excandefactæ, & quidem hujus tantam recipiebam copiam, quo colliquationem & perforationem retortæ per id impedirem, deſtillabam mixturam, ſeparato prius ſeorſim ſpiritu urinoſo, igne fortiſſimo in præmiſſam aquam, unde nanciſcebar itidem perpulchrum phosphorum, ſed tamen in minori copia, quam §. 31 & 32 acceperam; Caput mortuum leniter excandeſcebam, & per ſe colliquabam absque ulla additione, ſicque accipiebam perpulchrum & ductile argentum pondere drachm. 2 & ſcrupul. 2, cujus aliquam portionem in aqva forti ſolvebam, qvia in eo aliquam

mu-

mutationem per phlogiſton & terram ſubtiliſſimam vitreſcibilem introductam ſuſpicabar, verum nullum nobilioris metalli veſtigium occurrebat.

§. XXXIV.

Ut autem per experimenta demonſtretur, quod vegetabilia etiam, quibus tam quotidie, quam etiam nunc & tunc nutrimur, idem illud contineant, qvod ad compoſitionem phosphori neceſſarium eſt; jam reperiebam tam in Albini Diſſertat. de Phosphoro, qvam in Celeberr. Hoffmanni notis ad Poterium p. 477. *quod ſemen Sinapi*, *Rutæ & Erucæ* fortiſſimo *igne phosphorum ſuppeditent*: Cum vero ejus rei experientia mihi deeſſet, ſimul etiam in Collegio Manuſcripto ſuper primam editionem chymiæ Boerhavii a doctiſſimo & chymicarum rerum peritiſſimo D. Profeſſore Pott habitum, cujus infucata amicitia & manuductione mutua in chymicis frui mihi datum eſt, reperirem, qvod etiam triticum, ſecale aliaqve ejus generis phosphorum dimittant, hinc ſeqventia inſtitui experimenta.

§. XXXV.

Seligebam pro meis tentaminibus Semen Sinapi, Semen Erucæ, Naſturtii hortenſis, Piperis, & tritici, ultimum qvidem tanqvam maxime uſitatum & eſculentum: Cujusvis horum bonam portionem diverſis retortis immittebam, deſtillabamqve ea usqve ad lenem incandeſcentiam. De unoqvoqve recipiebam capitis mortui circiter 6 uncias, qvas pulveriſabam, & qvodvis ſeorſim in retorta terrea luto bene

mu-

munita igne fortiſſimo deſtillabam, & ex omnibus acqvirebam pulchrum phosphorum, ſolo excepto pipere, omiſſa etiam additione immixtæ arenæ, qvam D. Albinus commendat, quippe qvam minus neceſſariam reperio. Eqvidem experimento meo circa piper non tenaciter inſiſtam, ſed aperte confitebor, me pro minuendis impenſis ejusmodi piper aſſumſiſſe, ex qvo antea oleum eſſentiale deſtillando ſeparatum, & poſt rurſus ſiccatum fuerat; alia vero occaſione ſpero, me plura experimenta circa vegetabilia capturum eſſe.

§. XXXVI.

Hac vice vix qvicqvam ſupereſt, qvam ut adhuc cum debita honoris nuncupatione mentionem faciam Viri celebris, qvi circa præparationem phosphori, ejusqve in majori copia capiendi experimenta ſua non inutilia communicavit, ſcilicet Dom. Hellot, qui Pariſiis Anno 1737 in Actis Academiæ Scientiarum labores ſuos circa hoc ſubjectum inſtitutos publici juris fecit, qua in re prout laude induſtriæ ſuæ neutiqvam eſt privandus, ita tamen cuiqve ex comparatione mearum methodorum verſus eam, qvam ipſe ibi cum omnibus encheireſibus deſcribit, facile eluceſcet, qvod & majori copia, & parcioribus impenſis, & pauciore labore, & minoribus vaſis, & breviore igne, & certiore eventu multum diſcrepent.

Corollarii loco his addo; ipſum phoſphori acidum, ſi cum recenti fuligine tædæ commiſceatur & deſtilletur, denuo in priſtinum corpus phoſphorinum reſuſcitari.

Num. VII.

Num. VII.

Jo. Gottlob Krüger
Philos. & Med. D.

De novo muſices, quo oculi delectantur, genere.

§. I.

MUſicam ab antiquis retro temporibus ab hominibus excultam fuiſſe, neminem exiſtimo fore, qui dubitet. Docuit eandem primo ipſa natura, donec tandem a Pythagora ad leges mathematicas fuerit revocata; factum inde eſt, ut mathematicis ſcientiis annumeraretur nobiliſſima disciplina. Neque tamen illum ſtatim, quo nunc effulget, ſplendorem conſecuta eſt, poſtquam eius fundamenta non invita Minerva ſcrutari auſi ſunt mathematici. Quamvis vero haec ſint veriſſima, ultimum tamen eandem faſtigium attigiſſe, atque ad ſummum perfectionis gradum evectam eſſe, nemo niſi harum rerum ſit ignariſſimus, affirmabit unquam.

§. II.

Muſica cum ſit tonos connectendi ſcientia, prono inde alveo fluit, poſſe eandem in duas diverſas ſpecies commode dispeſci. Notum enim eſt, connexa appellari, quorum

unum rationem ſufficientem exiſtentiae alterius in ſe continet; quae cum ſint ſive ſimultanea ſive ſucceſſiva: orta eſt diſtinctio inter connexionem ratione ſpatii & temporis. In priori tonos connectendi ſpecie, quae Harmonia, vulgo der Generalbaß dicitur, feliciores mathematicorum induſtria experta eſt ſucceſſus, quam in poſteriori, quam Melodiam appellare conſueverunt, quaeque ingenii potius, quam intellectus opus hucusque fuit, neque adeo facile legibus mathematicis ſubiicii poſſe videtur, niſi forte aliquando eruditis videatur Poëſin, muſicam, oratoriam, pingendi artem aliaque ingenii opera eadem aſſiduitate atque diligentia rimari, qua in enucleandis geometricis veritatibus uſi fuerunt feliciſſime.

§. III.

Non poſſum non animadvertere, vix ullum aliquid dari, quod tam luculenter tamque diſtincte mundi nobis notionem repraeſentare valeat praeter muſicam. Mundum enim, cum dicamus ſeriem rerum ſimultanearum & ſucceſſivarum, inter ſe connexarum: nullus ſane erit definitionis character, nulla nota, quae non ad muſicam transferri posſet. Connectuntur enim a muſicis toni in harmonia ſimultanei, atque ſemper ille, qui graviſſimus eſt, & baſis dicitur, rationem continet ſufficientem, cur reliqui ipſi coëxiſtant. Et in cantu melodico, ratio, cur hic potius quam alius tonus percipiatur, ſemper erit in proxime praecedenti. Si negas:

toni

toni inordinate ſeſe excipientes eandem in animo procrearent delectationem, quae ab aliis producitur.

§. IV.

Non amplius immorabor his, neque longa oratione proſequar illa, quae a phyſicis circa harmoniae leges demonſtrata ſunt, atque experientiae fide corroborata. Haec omnia potius ſuppono, quippe quae illi fundamento innituntur, tonos eſſe directe uti vibrationum celeritates.

§. V.

Nobilius adhuc longe opus molior, muſicam ad oculos translaturus. Primus idem tentavit Reverendus Pater Caſtellus, atque conſtruxit eum in finem machinam eiusdem formae, quae clavicordio competere ſolet, hoc vero cum discrimine, ut pulſata non ſonum ederet, ſed fasciam ex ſerico coloratam elevaret, quae ante lampadis intra machinam abſconditæ flammam poſita viſu perciperetur. Cuilibet præterea tono proprium aſſignavit colorem, & ita quidem, ut cuiuslibet octavae infimus eſſet coeruleus, qui deſignare debebat illum tonum, quem recentiores muſici littera E indigitare ſolent. Coeruleum excipiebant reliqui hoc ordine: viridis marinus, viridis, clivarius, flavus, croceus, aureus, ruber, cramèſinus, violaceus, violaceo coeruleus & coeruleo violaceus. Jam quis non expectaſſet, ſummas ex tanto apparatu oculorum delicias voluptatemque illam, quam auribus muſica inferre ſolet, niſi longe ſuperiorem, ſaltem tamen aequalem. Sed ſpes fefellit, neque ex voto ſucceſſit experimen-

 tum.

rum. Id cum animadverteret Reverendus Pater, depingere in faſciis curavit variarum rerum imagines, ut pro affectus, qui in ſpectatore excitandus eſſet, diverſitate, diverſae quoque oculis obiicerentur imagines. Verum ſic a propoſito ſibi antea ſcopo plane deceſſit, cum oculos non tam coloribus, quam potius pictura inani delectare contenderet.

§. VI.

Poſtquam hanc machinae Caſtellianae deſcriptionem attentius paullo conſiderare incepi, mirari deſii, felici ſuiceſſu caruiſſe propoſitum ſundamento fere omni deſtitutum. Plurimae enim adſunt rationes, quae omnem dictae machinae effectum penitus ſufflaminare videntur. Easdem non ſine maxima voluptate relatas inveni in ſermone a Viro incomparabili Krafftio habito (*) in ſolemni academiae ſcientiarum Petropolitanae conventu, cuius orationis an ſoliditatem & eruditionem, an potius dictionis latinae puritatem & elegantiam magis admirari debeam, dubius haereo omnino. Urget primo celeberrimus auctor in ſolo arbitrio Caſtelli poſitum non fuiſſe, colores hos potius, quam alios tonis ſubſtituere. Quid enim muſica evaderet, ſi loco generis diatonico chromatici, quod univerſali cum applauſu a muſicis hodie receptum videmus, genus quodcunque aliud atque tonos inordinate & ſine ulla ſuppoſita lege ſeſe excipientes ſubſtituere vellemus? accedit quod ſupra iam monui, muſicam omnem eſſe vel harmonicam vel

(*) d. 29 Aprilis 1742.

vel melodicam. (§. 2.) Quodſi igitur iam ultro largiri vellemus, cantum melodicum huius machinae ope oculis poſſe repraeſentari, quid vero fiet de cantu harmonico, a quo maximam, neque ſine ratione, ſuavitatem promittere ſolent muſici? rem enim paullo attentius conſiderantes inveniemus, ſonos ſibi coëxiſtentes, non ſigillatim, non ſeparatos, ſed ſimul & commixtos quaſi percipi. Sicuti namque fremor in aure ſic quoque tremor particularum aërearum confunditur & plane commiſcetur, cum in Caſtelliana machina non commixti appareant colores harmoniam conſtituentes. Sonos praeterea acutiores per colores albore magis dilutos repraeſentaturus praeclare omnino ſeſe fefellit. Albor enim, ſicuti demonſtrante Newtono fortius lumen indicat, aptior ad repraeſentandum fortem quam acutum ſonum eſſe videtur. Ut taceam depictas in faſciis imagines. Suavitatem enim ab iisdem expectandam coloribus adſcribi non poſſe, quis eſt qui non videt?

§. VII.

Haec omnia ambabus largior Celeberrimo Viro dicti ſermonis Auctori. Sed cum pluribus rem perſequitur, & impoſſibilitatem eiusmodi inſtrumenti muſici ocularii demonſtrare annititur, fateri cogor, me rationibus ab ipſo adductis eo perduci non potuiſſe, ut oculis omnem ſpem denegarem, fore, ut aliquando eadem voluptate perfunderentur, qua aures afficere conſuevimus. Primarium argumenti robur eo redire videtur, quod concentus muſicus oculis pro-

 pterea

pterea repraeſentari nequeat, quoniam ad ſoni perceptionem motus in aëre requiratur tremulus celerrimus, cum e contrario motus luminis in fluxu aequabili quamvis celerrimo conſiſtat. Verum non ſonos proprie, non concentum harmonicum oculis percipere deſideramus, quod uti lubentiſſime concedo, eodem modo abſonum foret, ac ſi colores guſtare atque tonos olfacere vellemus. Hoc tantummodo cupimus, ut oculi eadem ratione coloribus, qua aures tonis delectarentur. Id quod fieri omnino poſſe mihi perſuadeo, quamvis non adſit in lumine motus, qualem ſibi Malebranchius finxerat, tremulus. Quemlibet enim ſenſum determinatam aliquam corporum ambientium actionem requirere, conſtat inter omnes, neque dubium ulli videbitur, actionem hanc determinato aliquo gradu contingentem, gratam, alia vero ratione ingratam in animo excitare ideam. Deinde, ſi vel maxime concederemus, motum tremulum ad gratam requiri ſenſationem, quidni eundem tunicae retinae oculorum competere adfirmaremus, quod pluribus alibi rationibus a me confirmatum eſt. Cum itaque non quaelibet colorum quorumvis commixtio oculum delectare valeat, ſicuti & idem de quolibet harmonico concentu affirmari nequit: operae omnino pretium eſſe exiſtimo, inquirere, an iisdem oculus, quibus auris, proportionibus delectetur.

§. VIII.

Non defuerunt pictores curioſi, & excitati a pulvere & radio viri incomparabiles, qui relationem partium corporis humani

humani numeris exprimere auſi fuerunt. Detexerunt tandem omnes, quod proportiones partium corporis humani ſani & pulchri eaedem ſint cum iis, quae a regulis ſymmetriae praecipiuntur, & quibus ad aedificiis conciliandam pulchritudinem experientia edocti utuntur architecti; id quod iam obſervavit Vitruvius, qui Lib. III. Cap. I. ſic
„ pronunciat: non poteſt aedes ulla ſine ſymmetria atque
„ proportione rationem habere compoſitionis, niſi uti ad ho-
„ minis bene figurati membrorum exactam habuerit ratio-
„ nem. Nonne vero ſymmetricae proportiones coincidunt cum illis, quibus muſicas exprimere ſolemus conſonantias? in utroque enim caſu requiritur, ut numeris non adeo magnis exprimi relatio poſſit, quod nemini dubium videbitur, qui cogitaverit, conſonantias muſicas ad unitatem eſſe ut $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$, diſſonantias vero ut $\frac{8}{9}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{8}{15}$ $\frac{45}{64}$. De tono quarto, qui ad unitatem eſt ut $\frac{3}{4}$ adhuc ſub iudice lis eſt, an conſonantiae ſive diſſonantiae nomen mereatur, de qua controverſia nonnulla propoſuit Matheſon. Non poſſum non, quamvis alienum ſit a noſtro propoſito, hac occaſione monere, diſtantiarum planetarum noſtri ſyſtematis a ſole relationem non longe abeſſe ab illa, quae eſt conſonantiarum in muſica, unde fortaſſe concentus corporum coeleſtium a Pythagora olim propoſitus rationali modo explicari poſſet; quamvis a me nondum impetrare potuerim, ut credam, eundem fuiſſe Pythagorae de hoc concentu conceptum.

§. IX.

§. IX.

Cum itaque manifeſtum ſit, animum noſtrum in diiudicanda obiectorum, quæ oculum afficiunt, ſuavitate & moleſtia, easdem obſervare leges, easdemque regulas, quibus in diſtinguendis conſonantiis a diſſonantiis muſicis uti conſuevimus: (§. 8.) nullum amplius de conſtituenda machina, qua oculi perfecte eadem ratione coloribus, qua aures muſica delectari poſſunt, ſupererit dubium, ſi modo demonſtrari poſſet, colorum eandem eſſe relationem, quae eſt tonorum ſcalam muſicam conſtituentium. Nihil vero facilius videbitur primo intuitu. Nonne inquis, ſummus Newtonus a poſteriore oſtendit, longitudines ſeptem colorum, ex quibus radius ſolaris componitur, perfectam repraeſentare ſectionem monochordi. Id quod pendet a diverſa radiorum refringibilitate. Haec vero eſt in ratione inverſa virium, quibus radii colorati praediti ſunt, & cum celeritas omnium radiorum ſit aequabilis, refringibilitates radiorum erunt inverſe ut maſſae. Sed dicam quod res eſt. Non demonſtrat ingenioſiſſimum Anglorum Philoſophi experimentum, vires radiorum ſequi eandem rationem, quae inter tonos in genere diatonico chromatico intercedit. Radii enim quantitas non ex ſola longitudine, ſed ſimul etiam ex latitudine aeſtimanda eſſe videtur, quam nullibi determinatam invenio. Neque adeo facile certis limitibus circumſcribi poterit, cum experientiae fide conſtet, colorem unum prismatis ſemper ſucceſſive tranſire in alterum. Revera vero vires radiorum

colo-

coloratorum non eſſe in ratione tonorum ſcalam muſicam componentium, ſic demonſtrabo. Si ponamus tonorum & colorum eandem ad ſe invicem eſſe relationem, atque in diiudicanda obiectorum ſuavitate, oculum iisdem, quas auris obſervat, regulis ſubiici, conſequens eſt, ut colores eodem modo coniuncti, quo toni muſici coniunguntur, conſonantiam conſtituentes, ſuaviter viſum afficiant, & ut contra ita combinati, uti coniunguntur toni muſici diſſonantiam auribus exhibentes diſpliceant omnino. Verum hoc tantum non ſemper fallit. Faciamus periculum. Color ruber & aureus commixtus ſuavem oculis conciliat ſenſationem, quod fieri plane non poſſet, ſi dicti colores uniti eodem modo in oculum agerent, quo aurem afficit diſſonantia, quam ſecundam appellare ſolent muſici. Idem de ſeptima valet, quae ex coloris rubri cum violaceo coniunctione reſultaret. Sola in hac colorum ſcala quarta diſſonantiam ſive colorem ingratum exhibet. Quodſi vero aliam colorum ſcalam conſtituere vellemus, fieret id plane ſine ratione ſufficiente.

§. X.

Haec dum legis, erudite lector, vix exiſtimo ullam tibi ſpem ſupereſſe de conſtruendo aliquo organo oculari. Sed nondum deperdita, nondum conclamata res eſt. Explicabo tibi machinam a Caſtelliana diverſiſſimam, quae omnino ad delectandos coloribus oculos aptior eſſe videtur.

§. XI.

Tab.VII. Fig. I. Conſtruatur inſtrumentum muſicum tale, quod vulgo Clavecymbalum appellatur, A. B. C. D. quodque pulſatum ſonum edit. Huic machinae connectatur ciſta ex aſſeribus ligneis confecta C. D. E. F. cuius pars poſterior E. F. arcum alicuius circuli repraeſentet, cuius diameter ſit ad minimum unius perticae. Claves huius inſtrumenti prolongari debent usque ad dictum arcum circuli E. F. iisque affigi vitra colorata plana, X, ita diſpoſita, ut ſint arcui E. F. parallela. Colorum ſcalam componentium ordo ſit idem, qui eſt in radio ſolari per prisma refracto. Quodſi itaque tono E. color ruber reſpondeat, d. erit aurei, e. flavi, f. viridis, *g* coerulei, a. purpurei & h. violacei coloris. Semitonia posſunt per colores proxime adiacentium commixtos repraeſentari. Aperturae, per quas apparent vitra colorata, ſint circulares, ita tamen, ut apertura ſit eo maior, quo tonus eſt gravior, & eo minor, quo tonus acutior. In cavitatem C. D. E. F. ponantur lampades G. tot quot adſunt in clavecymbalo toni, & poſt illas ſpecula ſphaerica concava H. Ante vitra vero colorata in aperturas circulares inſerantur lentes vitreae convexae I. Flamma ponatur in focum ſpeculi concavi, ut radii inde reflexi reddantur paralleli, atque ſic incidentes in lentem convexam magis adhuc coërceantur, ne divergere poſſint, eodem plane ſcopo, quo idem in Fig. II. laterna magica fieri ſolet. Ne vero fumus moleſtus ſit, cum tot requirantur lampades, quot in clavicordio adſunt toni,

poterit

Tabula VIII. pag. 354.

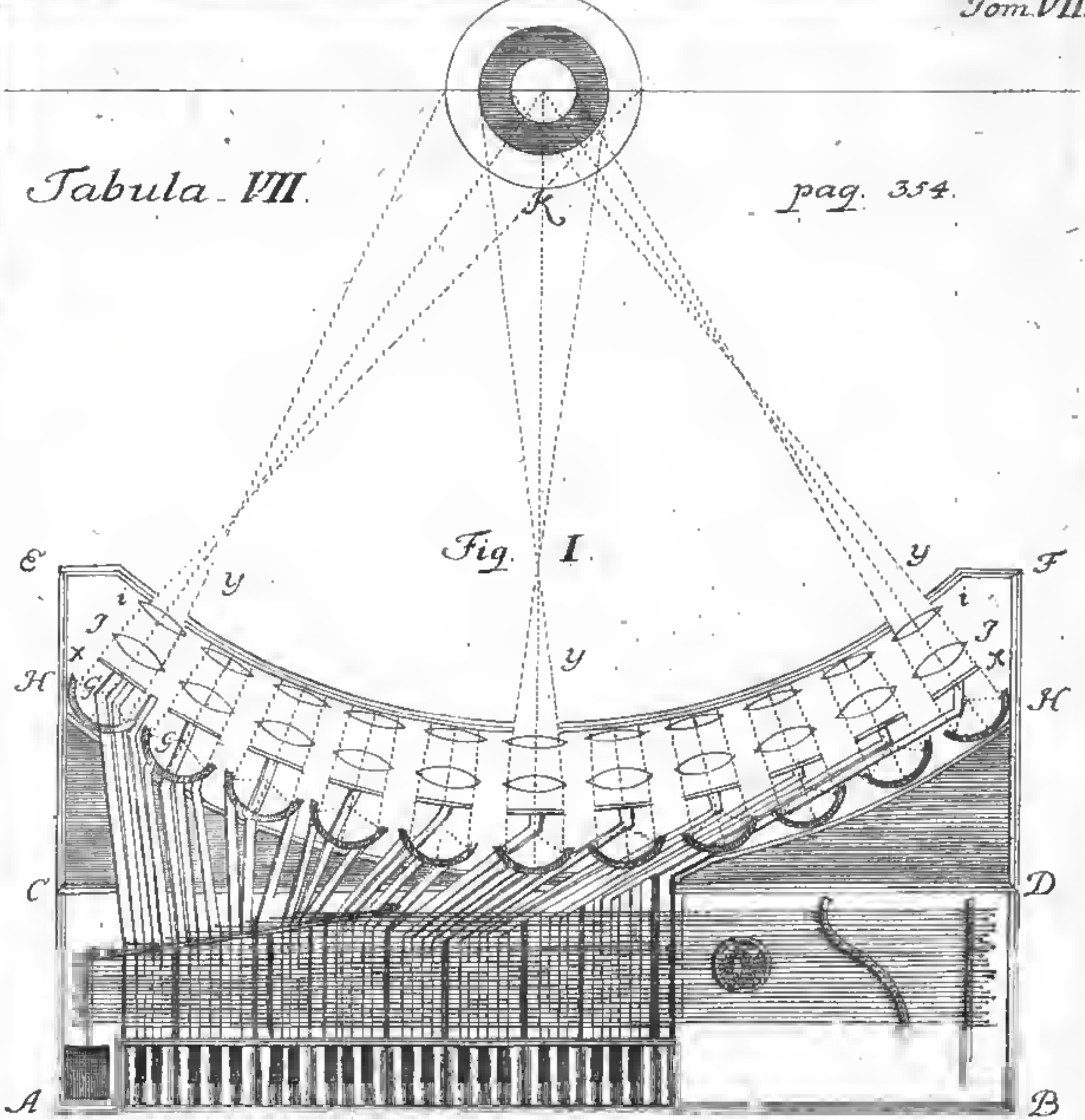


Fig. I.

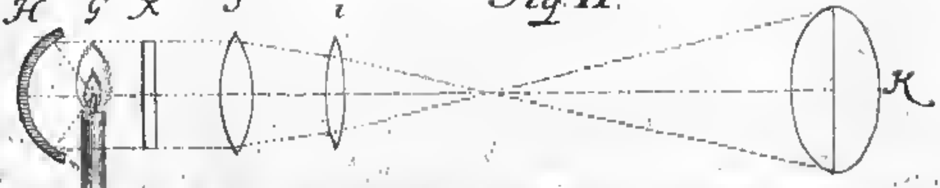


Fig. II.

delineat. per C. G. Kratzenſtein. J. H. Friſch ſc.

poterit ille ope tubi ex laminis ferreis confecti per feneſtras hypocauſti, in quo experimentum inſtituitur, derivari.

§. XII.

Ex machinae conſtructione apparet, quod ſi illam repoſueris ad tantam a pariete diſtantiam, quae ſit ſemidiametro circuli, cuius arcum machinae interior facies E. F. repraeſentat, aequalis, fore ut omnes radii colorati verſus unicum parietis punctum K, quod memorati arcus E. F. centrum eſt, convergant. Jam pone lampades accenſas eſſe, nulla lux apparebit, niſi pulſato inſtrumento. Abſconduntur enim lampades, & aperturae circulares clauduntur perfecte. Depreſſis vero machinae, quas dicunt, clavibus, in parietis oppoſiti uno eodemque loco comparebunt colores, diverſi, ſi toni diverſi, iidem vero, ſi toni iidem fuerint, ita tamen, ut a gravioribus maior, ab acutioribus vero minor circulus efficiatur. Atque ſic toni ſimul pulſati colores ſuos in pariete confundent, ut novus exinde color oriatur pro ratione commixtionis gratus ſive ingratus. Quod, ut eo clarius appareat, concipe tibi triadem harmonicam c. e. g. & videbis c. repraeſentare circulum maximum colore rubro imbutum, cui commiſcebitur circulus concentricus minor coloris flavi, atque his ambobus demum admiſcebitur circulus coloris coerulei prioribus cocentricus quidem, ſed minimæ diametri.

§. XIII.

Cum lux colorata per pleraſque lentes vitreas transiens,

figuram accipiat conicam, quae ita ſecatur a pariete oppoſito, ut ſectio cum baſi angulum efficiat obliquum: non poterit non figura exinde elliptica oriri, quae ellipſis eo longior erit, quo acutiores ſive graviores ſunt toni. Sed potes & huic malo, ſi tale eſſe exiſtimes, mederi, vitris alium concedendo poſitum pro ratione acutiei ſive gravitatis diverſum. Id quod Geometriae ſublimioris perito facile patet.

§. XIV.

Plane non affirmo, colores in pariete ſic depictos ſemper fore in eadem ratione, in qua ſunt toni inſtrumenti muſici ipſis coëxiſtentes, quod ſperandum non eſſe ſupra iam oſtendi (§. 9.) Quid vero inde? nihil ſane, niſi quod plures colores commixti quam toni forent harmonici, ſive quod diſſonantiae colorum rariores futurae ſint, quam tonorum diſſonantiae. An hoc vero imperfectionis nomen mereatur, dubito non ſine ratione, & potius concedo in ſententiam illuſtris Leibnitzii, qui diſſonantias per ſe nunquam placere exiſtimavit, ſed facere tantummodo ad eo vividiorem conſonantiarum perceptionem.

§. XV.

Exactam temporis menſuram, quae in producendis tonis accurate obſervatur, non parum ad muſices ſuavitatem conferre, quilibet concedet, qui huius artis principia non ignorat. Muſicam enim ſine hac carere omni effectu & eſſe abſurdiſſimam, conſtat inter omnes. Eadem vero temporis menſura in noſtro inſtrumento obtinet

quam

quam accuratiſſime, quae colorum cum ſonis harmonia non poteſt non in ſpectatore & auditore maximam excitare voluptatem. Quodſi praeterea cogites, innumeras variationes novosque colores ex primariorum commixtione oriundos, non dubitabis inſtrumentum noſtrum ad delectandos coloribus oculos eſſe aptiſſimum, quamvis non negem, aliis adhuc modis idem perfici poſſe. Unicum tantummodo commemorabo. Si ante aperturas circulares y. ponantur vitra polyhedra, effici poterit, ut infinitus colorum numerus in pariete oppoſito repraeſentetur. Haec non coniecturis, non hypotheſibus inanibus innituntur. Quare nullus dubito fore, ut aliquando muſica, qua oculi delectantur, ad eundem perfectionis evehatur gradum, in quo muſicam, qua aures demulcentur, conſtitutam conſpicimus.

Num. VIII.

Jo. Leonh. Friſch

De nido Chlorionis ſive turdi lutei.

Quadruplici defectui in Ornithologia mederi cupiens, progreſſus ſum, quantum potui, & e duodecim claſſibus, in quas omnes omnium ſpecierum & generum aves inprimis in Germania, diviſi, tres abſolvi. In hoc opere mihi primo curæ eſt accuratior Volatilium diviſio. Secundo, certi nominis cujuslibet avis conſtitutio, ut ſaltem doctiores eas diſtinguere poſſint. Singuli enim pagi mutant & diſtorquent avium nomina, quod magnæ confuſionis ſubinde cauſa eſt. Tertio. Figuræ cujuslibet avis emendatior delineatio. Quarto, colorum, quibus natura has creaturas ornavit, accuratior imitatio. Supereſt mihi nidorum & ovorum avium hiſtoria, in qua multa ſupplenda ſunt; non qvod ad ubivis fere obvios nidos attinet, ſed ad rariores, hoc eſt, qvi raro in impeditiſſimis ſylvis reperiuntur; reperti non ſine periculo detrahuntur; detracti a paucis delineantur, a nemine deſcribantur. Auſus ſum hac vice ſpecimen talis ſupplementi dare, & nidum
Tab.VIII. Chlorionis, ſive turdi lutei, Germanice Widewol, ſive Pfingſtvogel, Kirſchvogel, Bierolt, oculis lectorum ſubiicere, & pro-



F. ſc.

propter eximiam texturam, ejusque paucis notam materiam deſcribere.

Quæ Gesnerus de figura nidi Chlorionis ex aliis annotavit p. 714 de avibus, pleraque obſcura & ſolo intuitu figuræ, quam hic addo, explicantur. Obſcurum enim eſt, quo nonnulli eum ſimilem dicant bireto vel pileo Veterum. Talis biretorum vel pileorum figura nemini amplius nota eſt; æque ac cyathi figura, cui ab alio comparatur. Similitudo ſeroti arietis propius accedit. Textura nidi hæc eſt: Eligit hæc avis ramulos in arbore duos, qvæ plerumque qvercus eſt, fortior eorum digiti minimi craſſitudine eſt, debilior vix calami ſcriptorii; his alligat ſacculum ſuum, & in aëre pendentem ventis relinquit, qvi eum tanqvam cunas movent, & ſimul aves alias deterrent. Foraminis, per qvod intrat, diameter duorum pollicum eſt, nidi longitudo duorum palmorum. Stamen texturæ & funiculi, quibus alligatur, eſt gramen tenue, qvod tamen etiam aridum factum valde tenax eſt. Subtegmen ex ejusdem graminis filis conſtat & nodulis e certarum erucarum & aranearum telis ita intricatum, ut non modo firmiter teneat, ſed & ovis & pullis ſatis molle & calidum receptaculum ſit. Cæterum quia chlorion tardius ad nos venit, maturis ſcilicet jam ceraſis, & citius cæteris avibus abit: Primo ſtatim adventus ſui die texturam nidi incipit, & brevi tempore bis foetus ſuos in eo procreat.

Num.

Num. IX.

N. N.

De cauſa gravitatis.

Gravitatio corporum in ſe mutua tam latiſſimè patet, ut plurimi philoſophi non dubitaverint eam ad primas materiæ proprietates, cujusmodi ſunt extenſio & inertia, referre, mutuamque corporum ſeſe attrahentium actionem à viribus inſitis deducere. Cum enim corporibus extenſio & inertia ideo tribuantur, quod omnibus conſtanter & perpetuo ineſſe deprehendantur, ſimilis fere ratio gravitatis videbatur, propterea quod vix ullum adhuc ſit obſervatum corpus, quod gravitatione penitus careret. Non ſolum enim omnia corpora circa terram poſita deorſùm nituntur, ſed etiam terram ipſam cum reliquis planetis ſolem verſus urgeri, obſervationes aſtronomicæ ad leges Mechanicæ examinatæ luculenter docuerunt; quin in minimis etiam corporibus, quæ quidem experimentis ſubjici poſſunt, ſimilis quædam vis ſive magnetica ſive electrica quotidie magis magisque evincitur. Sane in Aſtronomia attractionis hypotheſis utiliter adhibetur in explicandis gravitatis phænomenis. Planetæ enim & Cometæ perinde moveri obſervantur, acſi cum à ſole tum à ſe mutuò attra-

attraherentur, iisdemque legibus progrediuntur, quas eis ex hac hypotheſi Vir ſummus Newtonus præſcripſit. Mathematico ad determinandam quantitatem effectuum & virium minime opus eſt, ut qualitates & cauſas earum rerum perſpectas habeat, adeoque omni jure utitur termino attractionis ad indigitandam cauſam, etſi hanc prorſus ignoret. Cumque in natura effectus unus ſit cauſa alterius effectus, Phyſicus rationem effectus ab alio, cujus cauſa ipſum fugit, redditurus, hunc ejus cauſam allegare, adeoque ex attractione tanquam ex indubitabili Phænomeno aliorum Phænomenorum rationem reddere tenetur. Imo etiamſi vel maxime vera attractionis cauſa detecta fuerit, non tamen in explicandis ſingulis ejus effectibus ab iſta causâ remotâ ratio petenda eſſet, quæ ab effectu ejus obſervabili tanquam a proxima meritò derivatur. Aſt battologiam à Carteſio feliciter profligatam in Philoſophiam jure quaſi poſtliminii reducunt, ſibique & aliis viam ad ſolidiorem rerum naturalium cognitionem præcludunt, quotquot de inveſtigandâ gravitatis cauſâ deſperantes nodum gordium ſecare conantur, dum attractionem vim primitivam corporibus inhærentem eſſe, acriter contendunt. Nimirum ex notione effectuum ſeu Phœnomenorum attractionis, quæ ſolâ obſervatione innoteſcunt, per præcipantiam fingunt eandem cauſæ notionem, idemque per idem explicantes committunt circulum maxime vitioſum. Attractionem enim concipiunt per vim, qua corpora ad ſe invicem urgentur, & gravitas ipſis eſt vis, qua cor-

pus fertur verſus centrum terræ; rationem autem reddituri cur id fiat, affirmant, id fieri propter attractionem ſeu gravitatem, quod idem eſt, ac ſi affirmarent, corpora ad ſe accedere mutuo, quia mutuo ad ſe accedunt, corpora tendere ad centrum terræ quia ad centrum terræ tendunt. An luculentius circuli vitioſi afferri poſſit exemplum, merito dubitandum. Ex primis Philoſophiæ principiis, ſeu ex notionibus communibus, quibus axiomata omnia conſtant, demonſtratum eſt, in cauſæ notione contineri notionem principii, quod nec admitti nec fingi debet, niſi ex ejus determinationibus, per quas concipitur, éffèctus inde dependens ſit explicabilis; alias Philoſopho quidlibet pro lubitu fingere liceret. Cauſa itaque & principium differunt ab effectu & principiato, uti determinans à determinato. Admodum diverſæ ſunt iſtæ notiones, resque per illas repræſentatæ; Trianguli latera, quibus anguli determinantur, non ſunt ipſi anguli. Ergo nec attractio & gravitas ſeu phænomena, quæ hoc nomine compellantur, ſunt eorum cauſa. Non ſolum vero admiſſa attractione ſeu gravitate inſtar vis corporibus inſitæ mirum in modum confunduntur notiones cauſæ & effectus, ſed & præterea pullulant innumeræ difficultates inextricabiles. In hac enim hypotheſi attractio producit omnes ſuos effectus absque omni contractu & impulſu & ſine ullo concurſu ſive materiæ propriæ ex corporibus emanantis, ſive alterius materiæ intermediæ: Stabilitur itaque eo ipſo realitas adeoque multo magis poſſibilitas actionis in diſtans, quæ fieri conci-

pi-

cipitur absque ullo contactu. Non ergo repugnat Sonum ad aures meas deferri ſine aeris interventu; conſpici a me objecta, quæ ob infinitam locorum intercapedinem organa mea ſenſoria tangere nequeunt; herbas in planetâ Saturno creſcentes vi attractrice in ſe incomprehenſibili in corpore meo vomitus aliosque vehementes inteſtinorum motus excitare, etiamſi neque nares neque os quicquam inde hauſerint. Admiſſa enim corporum actione in diſtans ſine impulſu, ex majori vel minori eorum diſtantia ratio diverſitatis effectuum reddi nequit. Concedunt attractionis patroni, corpora eo quod ſint entia compoſita extenſa & mobilia, in conflictu adeoque per contactum juxta regulas motus infinitis mutationibus obnoxia eſſe, eamque ob cauſam ea tanquam machinas conſiderari poſſe ac debere. Nec minori evidentia demonſtratum eſt, nullam in compoſito adeoque corpore accidere poſſe mutationem, niſi quoad figuram, magnitudinem partium, & locum totius, omnesque inde proficiscentes modificationes ex motu originem trahere. Sane ſcientia Phyſices ex eo demum tempore incrementa cepit, quo, exploſis qualitatibus occultis, Philoſophia Mechanica invaluit, quippe quæ, facem præferente Geometria, modificationes corporum ad cauſas ſuas revocans in eo verſatur, ut ex eorum ſtructuris texturis & mixtionibus, id eſt, ex modo compoſitionis mutationes inde pendentes ſecundum leges motus intelligibili modo explicet. Harum legum prima eſt, quod corpus unumquodque perſeveret in ſtatu

ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus illud à viribus impreſſis cogitur ſtatum ſuum mutare. Quoniam veritas iſtius propoſitionis per exempla patet, ſumunt eam Mathematici inſtar axiomatis, illique tanquam firmiſſimæ baſi arduam motus Scientiam ſuperſtruunt. Negari tamen nequit, evidentiam hujus axiomatis pendere ab alio antiquiore, quod ex nihilo nihil fiat, ſeu ex principio rationis ſufficientis; hoc enim ſublato nihil amplius obſtat, quo minus mobile ipſummet ſuam mutet celeritatem atque directionem. Evaneſcit itidem evidentia utriusque axiomatis in conceptu attractionis inſtar vis primitivæ, corpori inſitæ, quippe per ſupra notata attractio ſeu gravitatio Phænomenon tantum nihilque præterea denotat, cauſam vero mentitur termino inani, cui nulla notio, id eſt nihilum reſpondet, niſi fingendi licentiam tibi arrogans in gratiam attractionis corporibus animam quandam inque eâ appetitum, ſi non rationalem, ſaltem ſenſitivum, amorem vel inſtinctum, conſequenter in corpore duplicem Mechanismum concipere velis, quorum unus ex mechanicis explicabilis legibus contiguitatem & contactum neceſſariò requirit, alter vero absque contactu motum adeòque mechanismum immaterialem generat: In hac igitur hypotheſi gravitatio æquè ac extenſio omnibus corporibus tam ſunt propriæ, ut etiamſi corpus quodcunque per ſe à reliquis corporibus remotum ſpectetur, gravitate tamen tanquam eſſentiali attributo carere nequeat, unde & præterea prono alveo fluit, gravitationem

pariter

pariter ac motum concipi per ſe in uno corpore absque ulla relatione ad alia corpora, hoc eſt extra omnem nexum & Syſtema mundi materialis. Etſi autem ex hoc labyrintho exitus nullus pateat, attractionis tamen quidam defenſores in eo ultimum præſidium quærunt, quod nemo adhuc cauſam phyſicam gravitationis, quæ omnibus phænomenis ſatisfaciat, detegere potuerit. Fatentur nihilominus iniquisſimam atque Philoſopho indignam ſententiam eſſe, cujus effectus cauſam aſſignare nequeunt, ejusdem omnino cauſam dari negare. Videamus igitur an gravitatis cauſa mechanica indicari poſſit? Quid tentaſſe nocet?

In Mechanica ex prima motus lege demonſtratur, à corpore A. non poſſe moveri corpus B. niſi ipſum A. in motu ſit conſtitutum, conſequenter in nullo corpore ſtatus mutationem concipiendam niſi per conflictum, quo fit ut unius ſtatus conſervari nequeat ſalvo alterius impingentis ſtatu. Inde oſtendi poſſet, in omnibus, quibus mundus materialis componitur, partibus, ſtatu quidem diſcrepantibus, inter ſe tamen arctiſſimo nexu cohærentibus, continuam mutationem conſequi, ita ut nullum corpus vel puncto temporis in ſtatu ſuo conſervetur. Dum igitur corpus, quod etſi circa terræ ſuperficiem quieſcit, tamen deorſum nititur, à vi quadam externa deorſum urgeatur, ſanciunt leges motus. Hæc preſſio, cum à nulla materia viſibili efficiatur, ab inviſibili ortum trahat neceſſe eſt, quæ in corpus vel directè impingendo vel ob vim centrifugam premendo totum niſum

producat: Tertium cauſæ mechanicæ modum dari non ſuſpicantur attractionis Patroni. Verum gravitatem ab alliſióne materiæ ſubtilis deorſum incurrentis oriri recte negant, neque fere minori jure explicationes a vorticibus petitas, in quibus corpora per vim centrifugam deorſum pellantur, reprehendunt, quoniam hac ratione vel phænomenis non fit ſatis, vel ipſi vortices tam complicati excogitari debent, ut ſimplicitati, quam natura conſtanter affectat, nimium adverſentur. Hinc igitur, cum præter binos hos explicandi modos tertium non dari autument, merito ſibi concludere videntur, gravitatis cauſam mechanicam ſeu explicabilem omnino non dari. Quamvis autem iſta, quam faciunt, cauſarum enumeratio perfecta videatur, tamen in eo peccat judicium, quod gravitas immediate ex uno vortice oriri aſſumatur, cum eſſe queat effectus mediate ex pluribus vorticibus oriundus. Ex minimis autem vorticulis primum elaſticitatem provenire poſſe dubitare vix licet, atque hinc ſumma ætheris elaſticitas ortum habere merito videtur. Sub ætheris nomine intelligo fluidum ſubtiliſſimum univerſum mundi ſpatium ita implens, ut vix dentur pori ab eo vacui: cujus fluidi exiſtentiam præter alias rationes radiorum lucis ſive emiſſio ſive propagatio evidentiſſime comprobant. Simul vero ex his phænomenis perſpicitur, univerſum ætherem in ſtatu maximopere compreſſo verſari, cujus compreſſionis cauſa, ſi cui

minus

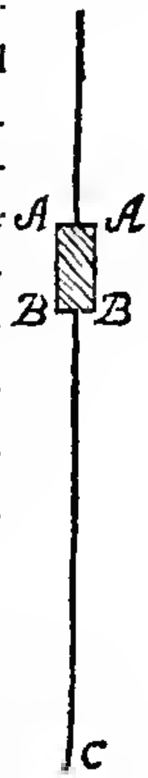
minus recte vorticulis tribui videatur, is ſaltem ætherem tanquam aquam undique maxima vi comprimi concedet; quicquid autem ſit, nihil contra leges philoſophandi ſaniores mihi quidem aſſumere videor, ſi ætherem eſſe fluidum undique circumfuſum ac ſummopere compreſſum ſtatuam; hæc enim hypotheſis tum experimentis & obſervationibus maxime eſt conſentanea, tum a ſuſpicione qualitatum occultarum, qualis eſt attractio, alieniſſima. Cum igitur æther vehementer ſit compreſſus, omnia corpora, quæ in eo verſantur, undique ingenti vi comprimantur neceſſe eſt, a quo effectu duritiem & cohæſionem corporum oriri veriſimillimum videtur, corpus autem ſic undique compreſſum ad motum non ciebitur, niſi preſſiones, quas quaquaverſus ſentit, fuerint inæquales. Quamobrem ſi æther ubique æquali vi eſſet compreſſus, in corporibus nullus prorſus motus generaretur; ſin autem compreſſiones ætheris fuerint inæquales, tum utique corpora ſollicitari deberent eam regionem verſus, ubi compreſſio ætheris fuerit minor. Quodſi ergo cauſa inveſtigari poſſet; ob quam compreſſio ætheris minor eſſet futura prope terram, quam alibi, cauſa gravitatis eo ipſo foret aſſignata. Cum autem æther ſit fluidum ſubtiliſſimum compreſſiones per eum ita æqualiter diſtribui debere videntur, ut ejusmodi inæqualitas, qualis ad gravitatem producendam requiritur, locum habere nequeat; ſtatim enim ac compreſſio uno in loco fuerit minor quam in adjacentibus, in his compreſſio relaxatur, atque quaſi puncto temporis in æquilibrium

redu-

reducetur. Verumtamen ex hoc ipſo fonte explicari poterit, quemadmodum inæqualitas in ætheris compreſſione locum habere queat; cum enim ſi ejusmodi inæqualitas affuerit, motus in æthere ſubſequi debeat, ita viciſſim, ſi motus in æthere adſit; ibidem compreſſio minor ſit neceſſe eſt. Quoniam namque motus generari non poteſt ſine dispendio virium, ſi ætheri motus prope terram tribuatur, iſte motus neque produci neque conſervari poterit, niſi compreſſio ætheris his in locis diminuatur. Quod etiamſi ex natura motus fluidorum oſtendi poſſet, tamen facilius per obſervationes in aere & aqua agnoſcitur, ubi compreſſiones, quamprimum motus acceſſerit, fiunt inæquales. Cum igitur valde ſit probabile, ætherem circa terram in continuo motu eſſe poſitum, quod cum plurima alia phænomena ſuadent, tum vero maxime virtus terræ magnetica evincit, nihil, quod legibus motus non ſit conforme, aſſumere mihi eqvidem videor, ſi ætheris compreſſionem prope terram minorem ſtatuam, quam in regionibus a terra remotis, ubi iſte ætheris motus minus viget. Hac autem inæqualitate compreſſionis in æthere admiſſa, omnia corpora, quæ circa terram ſunt poſita, majori vi deorſum prementur, quam ſurſum, propterea quod ſupra corpora ætheris compreſſio major eſt quam infra ea, & hanc ob rem ad deſcenſum ſollicitabuntur Simili modo ſi æther prope ſolem in motu continuo fuerit conſtitutus, gravitatio planetarum verſus ſolem hinc modo ſatis plano explicabitur. Effectus autem

magne-

magnetici perpetuum ætheris motum vorticoſum circa tellurem declarant, cujus generationem & conſervationem alia occaſione ex legibus motus explanabo, unde manifeſtum eſt, quæ cauſa virtutem magneticam producat, eandem gravitatis principium in ſe continere; quæ cum ob ſimplicitatem & conſormitatem naturæ maxime conveniant, ob hoc ipſum nullum dubium relinquunt, quin cauſa gravitatis in diminutione vis, qua æther prope terram comprimitur, collocari debeat. Quo autem gravitas ad terram appropinquando creſcat in ratione duplicata viciniæ a centro, quam legem phænomena indicant, neceſſe eſt, ut diminutiones compreſſionis ætheris in ratione diſtantiarum ſimplici decreſcant, quæ ratio cum ſit omnium ſimpliciſſima, ſimul veritatem hujus explicationis non mediocriter confirmat. Sit compreſſio ætheris abſoluta ſeu non diminuta $= c$, erit ea in diſtantia a centro terræ x æqualis c minus quantitate ipſi x reciproce proportionali; ponatur ergo compreſſio ætheris in diſtantia x a centro terræ C $= c - \frac{cg}{x}$. Hinc ſi corpus AABB circa terram verſetur, ejus ſuperficies ſuperior AA deorſum premetur vi $= c - \frac{cg}{CA}$, inferior autem ſuperficies BB ſurſum premetur vi $= c - \frac{cg}{CB}$, quæ vis cum minor ſit quam prior, corpus deorſum premetur vi $= cg\left(\frac{1}{CA} - \frac{1}{CB}\right) = \frac{cg.\ AB}{AC.BC}$.



Cum

Cum igitur magnitudo corporis AB ſit incomparabiliter minor quam diſtantia CB, erit $AC = BC$; hinc ejusdem corporis gravitas in diſtantia a centro quacunque erit ut $\frac{1}{AC^2}$ hoc eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro. Similis ergo erit ratio diminutionis compreſſionis ætheris circa ſolem atque planetas, propterea quod vis, qua corpora eo urgentur, pariter reciproce eſt proportionalis quadratis diſtantiarum. Ætheris vero conſtitutionem prope quævis corpora alterari, inflexio radiorum quæ obſervatur, dum radii prætereunt, non obſcure indicat. Cum enim radii in motu ætheris undulatorio conſtent, iſte autem motus a compreſſione ætheris pendeat, evidens eſt, ubi radiorum inflexio eveniat, ibi quoque compreſſionem ætheris diverſam eſſe oportere. Ex hoc vero fonte vis electrica corporum pariter atque adhæſio aquæ ad vitrum in tabulis capillaribus, aliaque ſimilia phænomena explicationem facilem nanciſcuntur; quæ omnia attentius perpendenti ſponte fient clariora.

PARS

TERTIA

CONTINENS

LITERARIA.

Pauli Erneſti Jablonski

Conjectura in Clauſulam Tabulae Bembinae, vel Iſiacae,

de Feſto *Oſiridis inventi*, deque die in anno Aegyptiorum Feſto huic proprio.

§. I.

IN antecedenti Miſcellaneorum Volumine, Specimen novae interpretationis Tabulae Bembinae celeberrimae, vel Iſiacae, benevolo Lectori obtuli. Expoſui quaenam ſit, me judice, Tabulae illius vera indoles, quale ingenium, quis ſcopus. Mihi nempe videtur, exhiberi Tabula illa ſeriem Feſtorum ab Aegyptiis, per totum annum, Romae celebratorum. Initium igitur Tabulae, de quo nullus mihi dubitandi locus relictus eſt, referendum eſſe dixi ad illa Aegyptiorum Feſta,

quae Gens iſta, tum ipſo Aequinoctii verni tempore, tum paulo etiam ante, religioſa ſolemnitate celebrare conſuevit. Figuras initiales, non quidem pro rei merito, ſed pro inſtituti mei ratione, breviter explicui. Miſſis nunc omnibus aliis, quae ſequuntur, ſymbolicis imaginibus, ad clauſulam totius Tabulae tranſibo, quae, niſi me omnia fallunt, *Solſtitium hybernum*, & ingruentia in hocce tempus Sacra celeberrima *Oſiridis inventi*, oculis noſtris objicit. Eum in finem, primo loco, figuras tabulae noſtrae ultimas, deſignatas in editione Amſtelodamenſi, qua me ſemper uſurum eſſe, profeſſus ſum, literis TT, VV, & YY. Quo facto idoneis argumentis oſtendere conabor, ſacram hanc ſolennitatem, in anno Aegyptiorum fixo, D. VI. Januarii peragi ſolitam fuiſſe.

§. II.

Tres igitur illas figuras, quarum explicationem nunc aggredior, Solſtitium hybernum ſymbolice nobis repraeſentare, mihi quidem certum ac indubium eſt. Id vero ex prima earum, quam in Editione Amſtelodamenſi Litera TT deſignatam cernimus, omnium luculentiſſime colligere licet. Siſtitur enim oculis noſtris *puer tenellus, infantulus adhuc, pedibus indiſcretis, & faſciis involutus*, indicium, *Harpocratis recens nati*, aut, quod re ipſa idemeſt, *Oſiridis renati*, vel *reperti*. *Horum* Iſidis filium, in imagine noſtra conſpici obſervavit jam dudum *PIGNORIUS*. Ita praeter eum judicant omnes, quantum recordor, qui rem hanc attingunt. Et quis aberrare his poſſit? adeo certa *Hori* indicia imago

iſta

iſta prae ſe fert. *Horum* vero eundem eſſe, certo nempe ſenſu & reſpectu, cum *Harpocrate*, tum ab aliis obſervatum, tum à *CUPERO*, in doctiſſimo *de Harpocrate* Commentario, iis rationibus edictum eſt, quibus aliquid addere velle, idem profecto eſſet, ac *noctuas* mittere *Athenas.* Scimus porro, ex diſertiſſimo *PLUTARCHI* teſtimonio, Aegyptios *HARPOCRATIS* ſui, fabuloſi ſane & aenigmatici, *natales* collocaſſe in *Solſtitio hyperno.* Verba auctoris illius hunc in modum concepta ſunt. (a) *Dicunt Oſiridem ſepeliri, quando ſemen terra occulitur: in vitam vero redire & rurſus apparere, quando pullulare incipit. Ideo etiam ajunt, Jſin cum ſe ſentiret eſſe gravidam, appendiſſe ſibi amuletum —— & peperiſſe HARPOCRATEM, ſub Solſtitium hybernum, imperfectum & tenerum valde*, idque inter *herbas modo e terra pullulantes & efflorescentes.*

§. III.

Rem hanc eandem declarari exiſtimo verſibus iſtis, (b) qui Apollini Clario tribuuntur, ſed quos vero ex Gnoſticorum Chriſtianorum Officina prodiiſſe, loco magis opportuno, pluribus oſtendam,

Φράζεο τὸν πάντων ὕπατον θεὸν ἔμμεν Ἰαώ,
χείματι μὲν τ' Ἀΐδην, Δία δ' εἴαρος ἀρχομένοιο
Ἠέλιον δὲ θέρευς, μετοπώρου δ' ἁβρὸν Ἰαώ.
Dic Deorum omnium ſupremum eſſe Jao,
Quem hyeme Orcum dicimus, ineunte autem vere JOVEM
Aeſtate porro ſolem, ac tandem hyeme adventante tenerum JAO.

Verſi-

(a) *PLUTARCHUS* de Jſide & Oſir. p. 671. extrem. 672. Edit. Steph. vel p. 377. Edit. Wechet.
(b) apud *MACROBIUM* Saturnal. Lib. I. cap. XVIII.

Verſibus his, qui non tam Græcorum, quam potius Aegyptiorum vetuſtorum Theologiam ſapiunt, explicatur varia ſolis per circulum annum vis ac poteſtas, quae effecit, ut diverſis etiam nominibus coleretur. Ineunte vere, vel in Aequinoctio verno, *JOVEM Ammonem* impenſe ab Aegyptiis cultum, eoque Solis in Arietem ingreſſum adumbratum fuiſſe, quod Oraculo Apollinis Clarii commemoratur, (c) ad initium hujus Tabulae jam obſervavimus. Hic jam *μετοπώρου*, quod vertere poſſumus *hyeme adventante*, oculis ſubjicere datur *tenerum Jao.* Aegyptii dixiſſent *ἁβρὸν* vel *νεαρὸν Ἁρποκράτην, puellum Harpocratem.* Dixiſſent *ἁβρὸν ὄσιριν, tenerum Oſirin,* ſiculi in alio (d) Oraculo Apollinis Didymaei

Ἴσιδι δ' ὦ Φαρίῃ γονίμοις παρὰ χεύμασι Νείλου
Μαιεύειν ὀιστροισιν ἑὸν πόσιν ὄσιριν.
Jſidi Phariæ curae eſt, ad fluenta fertilis Nili
Clangore ſiſtrorum quaerere tenerum ſuum Maritum Oſirin.

Verſu ſecundo pro *ὀισιροισιν* legere malim *σειστροισιν*, *ſiſtris,* uti etiam in verſione expreſſi. *Siſtra* Jſidis, quae geſtavit etiam Oſiridem quaerens, nemini ignota eſſe confido. Emendationem hanc etiam antecedentes Oraculi noſtri verſus, attente conſiderati, flagitare mihi videntur. Sed Gnoſtici, ut ad illos jam redeam, voce ſibi plane propria, alludentes ad Myſteria Religionis ſuæ, dixerunt *ἁβρὸν Ἰαώ.*

§. IV.

(c) Vide Miſcellanea hæc Tom. VI. p. 148. 149.

(d) apud *EUSEBIUM* Praeparat. Evangel. Lib. V. cap. 7.

§. IV.

Feſtum illud, quod Thebaei in Aegypto ſuperiori, à quibus Fabulas & Sacra Harpocratis ad reliquos Aegyptios perveniſſe opinor, *Harpocratis natalem* appellarunt, alii ex Aegyptiis *inventum*, aut *renatum Oſiridem* nuncupare conſueverunt. Ex commixtione utriusque Theologiæ Mythicae factum eſt, ut inventus ille Oſiris, modo ut maritus, modo ut filius Iſidis conſideretur. Res tamen ſemper eodem redit. In Oraculo Apollinis Didymaei, ad quod modo provocavi, dicitur Iſidem quaeſiviſſe *Oſirin tenerum ſuum maritum.* Alii in ſacris hiſce eundem pro filio Iſidis haberi volunt. Ita *MINUTIUS FELIX.* (e) *Iſis*, inquit, *perditum filium, cum Cynocephalo ſuo & calvis ſacerdotibus luget, plangit, inquirit. Mox* INVENTO PARVULO, *gaudet Iſis, exultant Sacerdotes* —— *nec deſinunt annis omnibus vel perdere quod inveniunt, vel invenire quod perdunt. Haec tamen Aegyptia quondam, nunc & ſacra Romana ſunt.* Scriptorem iſtum in his imitatur *LACTANTIUS.* (f) *Iſidis Aegyptia ſacra ſunt, quatenus* FILIUM PARVULUM *vel perdiderit, vel* INVENERIT. *Nam primo ſacerdotes ejus, deglabrato corpore, ſua pectora tundunt, lamentantur, ſicut ipſa, cum perdidit, fecerat. Deinde* PUER PRODUCITUR *quaſi* INVENTUS, *& in laetitiam luctus ille mutatur. Semper enim perdunt & ſemper inveniunt. Refertur ergo in Sacris imago rei quae vere geſta eſt.* In his & conſimilibus aliis veterum teſtimoniis, vides ſem-

(e) In Octavio cap. XXI.

(f) Lib. I. cap. XXI.

per mentionem fieri *pueri* & *parvuli*, qualem in imagine noſtra contemplamur, dici illum inventum, & hujus *rei imaginem in ſacris referri.* Mirum ſit, niſi hanc ipſam rem in animo etiam habuerit *CLAVDIANUS*, quando cecinit

— (g) *ſic numina Memphis*
In vulgus proferre ſolet. Penetralibus exit
Effigies; brevis illa quidem: Sed plurimus infra
Liniger impoſito ſuſpirat vecte ſacerdos
Teſtatur ſudore Deum.

§. V.

Verum ante omnia operae pretium eſſe duco, *MACROBII* verbis, fabularum Aegyptiacarum ſenſum arcanum aperire, & eadem opera ea, quae de ſignificatione imaginis noſtrae jam dixi, egregie confirmare. Ita autem ille (h) *Hae aetatum diverſitates ad Solem referuntur, ut* PARVULUS *videatur* HYEMALI SOLSTITIO, QVALEM AEGYPTII PROFERUNT EX ADYTO DIE CERTA; *quod tunc breviſſimo die veluti* PARVUS & INFANS *videatur.* Poterit ne jam merito dubitari, quin imago illa *parvuli, quam Aegyptii ex adyto certa die proferebant*, quaeque referebatur ad *hyemale Solſtitium*, ſit illa ipſa, quam in Tabula Bembina conſpiciendam hactenus explicuimus? Unicum hoc praeterea, antequam pedem promoveam, ad confirmandam explicationem meam, prioribus adjicere liceat. Videmus in imagine noſtra puerum tenellum, pedibus indiſcretis, faſciis invo-

(g) de IV. Conſulatu Honorii vs. 569. &c.

(h) Saturnal. Lib. I. cap. XVIII.

involutum. Putabimusne habitum hunc corporis, in Tabula, quae tota Myſtica eſt, ratione ſua arcana carere? Minime profecto. Eam vero nobis *HORAPOLLO*, nobilis Hieroglyphicorum interpres, ſic explicabit. (i) Δύο πόδες συνηγμένοι καὶ βεβηκότες, δρόμον Ἡλίȣ τὸν ἐν ταῖς ΧΕΙΜΕΡΙΑΙΣ ΤΡΟΠΑΙΣ σημαίνȣσι. Quorum verborum hic ſenſus eſt: *Duo pedes ſic in unum compacti, tanquam non duo eſſent, ſed unus, & ſic gradum promoventes, ſolis curſum in Solſtitio hyberno ſignificant.* Hic eſt verus verborum illorum ſenſus, quem etiam in Tabula noſtra clare adumbratum videmus. Quae adverſus lectionem conſuetam poſtremus in Belgio Editor objecit, morari nos non debent.

§. VI.

Licebit mihi jam eſſe breviori in explicanda figura ſequenti V V. quae nobis *Anubidem*, Mercurium Aegyptiorum, *capite canino inſignem* repreſentat, quod *PIGNORIUS* recte jam animadvertit. Opportune idem locum attulit *MINUTII FELICIS*, quem & ego §. III. ex parte produxi, quique imaginem hanc noſtram felicius, quam ipſe Pignorius vidit, illuſtrare poterit. Verba MINUTII ita ſonant: *Iſis perditum filium cum Cynocephalo ſuo — luget, plangit, inquirit: — mox invento parvulo gaudet Iſis — Cynocephalus inventor gloriatur.* En igitur Anubidem capite canino verendum, quem, ut recte monuit PIGNORIUS, *minus proprie Cynocephalum vocat Minutius.* Teſtatur MINUTIUS Anubidem illum, ſive Cyno-

(i) Hieroglyph. Lib. II. cap. 3.

Cynocephalum, Iſidi, filium ſuum, aut ſi mavis, maritum quaerenti, & Oſiridi ipſi invento adeſſe, quin imo ceu *inventorem gloriari*, ut igitur ex illa Solennitate, quam hic ſubinnui adſtruximus, abeſſe minime poſſit. Perquam facile eſſet, alia ex Scriptoribus vetuſtis, in eundem ſenſum adjicere. Verum ſufficiant nunc iſta MARTIANI CAPELLAE, in quibus fabulae Aegyptiacae ſenſum arcanum, ex ingenio ſuo nobis aperire nititur. Ita autem de Mercurio canit.

(k) *Qui fata ſuccidentis*
Separat libens Oſiris
Sationibus gravari
Genitalibus repertis.

§. VII.

Venio nunc ad figuram Tabulae ultimam, deſignatam literis YY. de qua haec PIGNORIUS. *Iſis Tabulam fere concludit, cui Leoninum caput impoſitum.* Et *Iſidem* quidem, nemo eſt, qui non illico agnoſcat. De eo vero pace Pignorii, aliorumque, qui in ejus ſententiam pedibus eunt, ſubdubitare liceat, ſitne caput Iſidi impoſitum vere Leoninum. Quod ſi enim Cebos, qui ſunt ex Cynocephalorum vel Cercopithecorum genere, verum ferociores & adſpectu truciores, in limbo (l) Tabulae noſtrae, attente intueor, atque cum hac imagine Iſidis, quam nunc explicamus, confero, videtur mihi caput illius, ad formam Cebi propius, quam ad Leonis acce-

(k) Satyric. Lib. II. pag. 32. ſin. 33.

(l) v. g. num. 22. & 43. in Editione Amſtelod.

accedere. Quod tanto minus utique mirandum, cum ſint inter veteres, (m) qui Cebis caput tribuant, Leonino non valde diſſimilē.

§. VIII.

Litem tamen ea de re acrem & pertinacem Pignorio non movebo. Sive enim caput ſit Leonis, ſive Cebi, res tamen ſemper eodem ferme redibit. Utrum enim eligas, nihil aliud monſtroſa illa mulieris cum fero animali in unum corpus compactio, ſymbolice nobis repraeſentare videbitur, niſi *Lunae cum Sole conjunctionem.* Sit caput, quod Iſidi attextum videmus, leoninum, quid quaeſo Emblemate illo Aegyptiorum ſignificabitur aliud, quam vis & poteſtas *Solis*, addita jam *Iſidi*, id eſt *Lunae?* Id enim in hieroglyphicis Aegyptiorum picturis, Leonem ſemper deſignaſſe, (n) PIGNORIUS auctoritate Veterum, tam luculenter probavit, ut hic quidem otium mihi fecerit. Rem eandem veteres Perſae Symbolo aliquantum diverſo repraeſentabant, quod in his tangit STATIUS

(o) *ſeu Perſei ſub rupibus antri*
indignata ſequi torquentem cornua Mithram.

Ad quae verba, LUTATIUS haec commentatur. *Perſae in Spelaeis coli Solem primi inveniſſe dicuntur. Eſt enim Sol in Spelaeo*

(m) Eorum teſtimonia diligenter congeſta videri poſſint, apud BOCHARTUM in Hierozoico Part. I. Lib. III. cap. 31.

(n) Vide ejus Commentar. in Tabulam Bembinam p. 64. 65. 68. 69.

(o) Thebaid. Lib. I. fin.

laeo (p) *leonis vultu, Perſico habitu cum thiara, utriſque manibus bovis cornua comprimens, quae interpretatio ad Lunam dicitur,* (lege *ducitur*) *Nam indignata ſequi fratrem, occurrit illi, & lumen ſubtexit. His autem verſibus ſacrorum myſteria pateſecit. Sol, lunam minorem potentia & humiliorem docens, taurum inſidens cornibus torquet. Quibus dictis Statius lunam bicornem intelligi voluit, non animalia, quibus vehitur.* Et quibusdam interjectis. *Simulachrum ejus fingitur reluctantis tauri cornua retentare: quo ſignificatur lunam ab eo lumen accipere, cum coeperit ab ejus radiis ſegregari.* Sequuntur illic alia, quae ad rem hanc faciunt, ſed quae deſcribere non vacat.

§. IX.

Quod ſi autem caput hocce, quod in noſtra imagine ſuperſtitio Aegyptiaca, capiti Iſidis impoſuit, ſit non leonis, verum, ut ego potius ſuſpicor, *Cebi* vel *Cynocephali*, res illa, de qua hactenus dixi, etiamnum apparebit luculentior. Conſtat enim ex diſerto HORAPOLLINIS teſtimonio, *Cebum*, vel quod idem fere eſt, *Cynocephalum*, ſunt enim haec Animalia unius generis, Aegyptiis fuiſſe notiſſimum emblema coitus Lunae cum Sole. Verba ejus ſunt. (q) *Cynocephalum pingunt, Lunam ſignificantes,* (dicendum erat, *Lunae coitum cum Sole ſignificantes*, quod ex nunc ſequentibus liquido intelligitur) *Nam animal hoc conſenſum quendam cum Deae congreſſu, ex quo & affici ſoleat, habet. Ubi enim aliquanto tempore Luna cum Sole*

(p) verba haec *leonis vultu* addidi ex ſequentibus.

(q) Hieroglyphic. Lib. I. cap. 15.

Sole congrediens, expers luminis, opacaque permanet, tum mas cynocephalum, nec quoquam intuetur, nec veſcitur, ſed demiſſo in terram vultu, indignabundus, velut Lunae raptum deplorans, triſtatur, cujus rei imaginem ad vivum plane expreſſam, Tabulae noſtrae limbus nobis exhibet num. 43. Alia quae apud eundem auctorem adduntur, omitto. Ad rem eandem PLINIUS procul dubio digitum intendit, de ſimiis his caudatis ſcribens. (*) *Mutianus* tradit, *luna cava* (i. e. in conjunctione Lunae & Solis) *triſtes eſſe, novam exultatione adorare.* Satis, niſi fallor, ex his, mens pictoris, & emblematica picturae ſignificatio perſpici poterit.

§. X.

Quaerat forſan aliquis: Quid vero illa Lunae cum Sole amicitia & conjunctio ad *Solſtitium hybernum?* cujus hic potiſſimum rationem haberi contendo. Cur tempore *renovati*, vel *renati Solis*, Solennia & Panegyres Lunae decernuntur? Nam deſignari hic Solennitatem Aegyptiis ſanctiſſimam, magnaque pompa celebratam, ipſa imago, attente conſiderata, per ſe ſatis teſtatur. Certe Oſiride invento & renato, Sacra fieri Jſidi, quod imago noſtra utique innuit, nihil mirum. Concinunt imagini huic veterum teſtimonia, quorum nonnulla §. III. adduxi, quae honorem beneficii hujus ad *Jſidem* referunt, quippe quae *Oſiriu quaeſiverit, quaeſitum invenerit*, ac denique *de invento cum Sacerdotibus gaviſa fuerit.* Id autem eſt, quod in imagine noſtra depingi credo. Neque vero rei

(*) Lib. VIII. hiſt. nat. cap. 54.

rei hujus ratio adeo obſcura eſt. Aegyptii enim, non ſecus atque gentes aliae, (r) Lunam tanquam terrae noſtrae matrem quandam & nutricem, quae virtute ſua in eam influeret, & ad fœcunditatem ejus plurimum conferret, ſemper venerati ſunt. Credidere iidem, Lunam hanc ſuam virtutem ac poteſtatem à Sole mutuari, unde fieret, ut appropinquante ad Hemiſphaerium noſtrum Sole, Lunae in terram noſtram beneficia ampliora quoque & conſpicua magis eſſent. Finxerunt itaque, Lunam, Sole ab Haemiſphaerio noſtro recedente, deſiderio ejus teneri, eumque ſtudioſe quaerere, redeunte vero eodem & veluti invento, impenſe gaudere. Hac de cauſa igitur, renovato Sole, ſolenniſſima Panegyris, ab Aegyptiis in honorem Jſidis ſuae, inſtituebatur, qua beneficia Solis & Lunae erga ſe, conjunctim, grata memoria recolebant, quod in imagine noſtra hieroglyphice adumbratum voluere.

§. XI.

A vero non valde, opinor, aberravero, ſi dixero, Panegyrin hanc noſtram, de qua diſſerui, eſſe ipſa *Jſea*, Feſtum in Aegypto religioſe celebratum quod in *Solſtitium hybernum* ingruiſſe, (s) *EUDOXUS* & alii graeci memoriae prodi-

(r) Videri ea de re poſſunt, NATALIS COMITIS Mythologia Lib. III. cap. 17. GERH. IO. VOSSIUS de Theologia Gentili Lib. II. cap. 19.

(s) teſtante GEMINO, in Elementis Aſtronomiæ, Edit. PETAVII in *Uranologio* pag. 33. fin.

prodiderunt. Equidem (t) *GEMINUS*, Eudoxum & ceteros graecos, ex quibus id refert, erroris manifeſti reos eſſe pronuntiat, eo, quod in anno Aegyptiorum vago, qui tempore Eudoxi, & diu etiam poſt obtinuit, Feſta ſemper moverentur, & ſpatio annorum 1460, totum annum pervagarentur. Concludebat ex eo Geminus, Feſtum, quod aliquando in ipſum Solſtitium hybernum inciderat, poſt annos 120, toto menſe ab eodem diſtare debuiſſe, eamque cenſuram calculo ſuo, (u) Petavius confirmat, quam vere, neſcio. Eſtne quisquam, qui ſibi facile perſuadeat, Eudoxo, magni nominis Aſtronomo, qui Aſtronomiae ſtudio Aegyptum petierat, ibique Sacerdotibus ſumma familiaritate conjunctus fuerat, quinimo eorundem convictu (w) ſedecim menſes, aut ut (x) nonnulli volunt, tredecim integros annos uſus erat, rationem anni Aegyptiorum adeo ignotam fuiſſe, ut neſciret, Feſta ipſorum, quovis quadriennio, die uno recedere, & ſic pergere, usque dum poſt confectos annos 1460. ad priſtinum ſuum initium redirent? Quae ſuſpicor potius, Eudoxum de tali *Iſeorum* Feſto loqui, quod ſemper in Solſtitium hybernum ingruebat, verum in anno Aegyptiorum vago, una cum Solſtitio procedebat. Nam Solſtitia & Aequinoctia ipſa, vel ſolennes eorum commemorationes, in anno illo vago, non aliter

 atque

(t) loc. cit. pag. 33. fin. 34.

(u) in notis ad Geminum, *Uranologio* p. 410. 411.

(w) DIOGENES LAERTIUS Lib. VIII. ſegm. 87.

(x) STRABO Geograph. Lib. XVII. p. 554.

atque reliqua Aegyptiorum Feſta proceſſiſſe, vel ex unius PTOLEMAEI *magna ſyntaxi* liquido perſpicitur. Sic, ut exemplum afferam, teſtatur (y) auctor ille, anno poſt obitum Alexandri M. 463. qui eſt, ſecundum CALVISIUM A. C. 141. *aequinoctium vernum* incidiſſe in D. VII. *Pachon* (11. Maji) *Solſtitium aeſtivum* in XI. *Meſori* (IV. Auguſti) & *aequinoctium autumnale* in IX. *Athyr* (V. Novembris). Si igitur in illo Aegyptiorum Anno Solſtitia recedebant, receſſiſſe etiam Feſta illis adſtricta, utique neceſſe eſt. Ab *Iſeorum* hoc Feſto, laeto & exoptato, quod in Solſtitium hybernum ingruiſſe dixi, diuerſa omnino fuere, quod nec GEMINUS, nec PETAVIUS recte animadverterunt, *Iſea* alia lugubria, quippe quæ reſpiciebant ad Oſirin, ſollicite adhuc quaeſitum, uti priora referebantur ad Oſirin, jam cum gaudio inventum. *Iſea* iſthaec lugubria, quae PLUTARCHUS, obſervante etiam PETAVIO, in menſem *Athyr*, reſpondentem fere noſtro *Novembri*, incidiſſe teſtatur, inciderunt in *Athyr*, anni non vagi, ut falſo ſibi perſuaſit PETAVIUS, ſed fixi Aegyptiorum. PLUTARCHUS *Iſea* haec celebrata eſſe dicit (z) D. XVII. *Athyr*, & ſequentibus, auctor vero *Kalendarii Romani*, editi ſub Conſtantio Imperatore, eadem in principia Menſis Novembris locat, cujus diſcrepantiae rationem alio loco aperiam. Sed in quem anni Aegyptiorum fixi, Menſem atque diem, *Iſea* noſtra, laeta ac auſpicata, ſeu, quod plane idem

(y) Libro III. pag. 72. Edit. græc. Baſil.
(z) Libro *de Iſide & Oſiride* p. 635. 653. 655. Edit. Stephani.

idem eſt *Feſtum inventi Oſiridis* conferre merito oporteat, nunc disquiramus.

§. XII.

Feſtum *Oſiridis inventi*, ſive, quod idem eſt, *renati*, inter ſolennitates Aegyptiorum religioſas omnes, praecipuum locum habuiſſe, vix erit, qui inficias ire ſuſtinuerit. Celebratum ſemper ab Aegyptiis fuiſſe, magna cum gaudii teſtificatione, ſatis docent, noti illi JUVENALIS verſus

(a) *Exclamare libet, populus quod clamat Oſiri*
invento,

ad quae verba haec obſervat vetus ejus interpres. *Populus Aegypti invento Oſiri dixit:* Εὑρήκαμεν, συγχαίρομεν. Formulae hujus Feſtivae, uti eam Juvenalis recte interpretatur, cujus hic ſenſus eſt, *invenimus*, & *una laetamur*, etiam apud (b) alios mentio occurrit. Sed in dubium adhuc vocatur, quisnam Feſtivitati huic, in anno Aegyptiorum, proprius dies dicatus fuerit. (c) Scriptor haud ita pridem perelegans & eruditus, Feſtivitatem hanc in *veris principum* conjicit. Et fator, rationem qua utitur, eſſe ingenioſam, & ab indole Theologiæ Aegyptiorum non ita alienam. Verum aliter tamen re ipſa, gentis illius Sacerdotibus viſum fuiſſe, nunc, credo, palam eſt. MARSHAMUS doctus & laborioſus an-

 tiqui-

(a) Satyra VIII. 29. 30.

(b) ATHENAGORAS Legat. pro Chriſtianis p. 24. FIRMICUS de errore profan. relig. p. 5.

(c) Mr. DES LANDES Hiſtoire Critique de la Philoſophie Tom. I. p. 151.

tiquitatis Aegypticae indagator, (d) *menſem Junium* ſolennitati iſti *dicatum* cenſet, forte, quod ſub idem fere tempus mundum conditum fuiſſe, Aegyptiorum traditio ferret. SCALIGER mavult (e) menſem *Athyr*, qui Romanorum *Novembri* fere reſpondet, eumque SELDENUS, (f) qui nobis etiam erroris hujus ſui originem, quam mox examinabo, indicat. KIRCHERUS hic quidem non adeo procul à veritate aberravit, quando Sacra hæc (g) menſe *Choeac.* i. e. *Decembri* celebrata eſſe affirmat.

§. XIII.

SELDENO & KIRCHERO fraudi fuerunt verba PLUTARCHI, quippe quae haud dubie in mendo cubant, quae tamen correcta & meditate expenſa, ad inveſtigandam veritatem, inſigniter prodeſſe nobis poterunt. Verba PLUTARCHI haec ſunt. (h) *Menſe Athyr, quando nox ſit longior, tenebrae creſcunt, lucisque ſuperatur & tabeſcit vis: tunc Sacerdotes cum alios lugubres ritus exercent, tum bovem auratum, nigro byſſino amictu contectum, Dea nempe* Iſide *tum lugente, oſtentant. Eſt autem bos Oſiridis pariter* (i) *& terrae Symbolum.*

Ritus

(d) in *Canone Chronico* p. 31. Edit. Franek.

(e) *De emendatione Temporum* Lib. II. p. 70.

(f) Libro *de Diis Syris* Syntagm. I. cap. IV. p. 141. & Syntagm. II. c. XI. p. 335.

(g) *Oedipo Aegyptiaco* Tom. II. Part. II. p. 262.

(h) De Iſide & Oſiride p. 653. Edit. Steph. vel 366. Edit. Wechel.

(i) Græcus Textus, in Editionibus, quas conſulere nunc poſſum, Stephaniana, Baſileenſi, & Wecheliana, habet. Βȣ̃ν γὰρ Ὀσίριδος εἰκόνα καὶ γῆν νομίζȣσιν. Lege καὶ γῆς, & ſic verti.

Ritus illos per quatriduum continuum à D. XVII. *Athyr* (XIII. Novemb.) *peragunt. Die vero menſis* XIX. *noctu ad mare deſcenditur, & ſacram ciſtam Stoliſtae, (quaſi veſtitores diceres) una cum Sacerdotibus efferunt, in qua eſt intus aurea arcula, cui infunditur ab aliis aqua potabilis, ac clamor tollitur ab his qui adſunt,* (k) *vociferantibus* OSIRIDEM ESSE INVENTUM. En igitur *Oſiridem inventum!* idque dicitur contingere ſolere die XIX Menſis, cum paulo ante menſis *Athyr* nominatim facta eſſet mentio. Licebitne igitur SELDENO aſſeverare, haec omnia *uno eodemque menſe Athyr Aegyptiis celebrata fuiſſe*, cum Plutarchus id clare teſtetur? Ego vero minime cenſeo. Verba enim PLUTARCHI, ex quibus id elicitur, corrupta eſſe, ſi aliunde non conſtaret, ex ſolo tamen rerum & verborum contextu evidenter colligitur. Ait enim auctor ille, Aegyptios per quatuor dies continuos, initium faciendo à (l) D. XVII. *Athyr*, ſacra lugubria peregiſſe propter Oſirin deperditum. Qua ratione autem id verum eſſe poſſit, ſi Die XIX. ejusdem menſis, Oſiris jam inventus, eoque luctus omnis in laetitiam verſus fuiſſet? Senſit hoc dubio procul KIRCHERUS, eamque ob rem, menſem ſequentem *Choeac*, ſive *Decembrem* ſubſtituit. Verum profecto, ne in hoc quidem ſubſiſtendum, ſed miſſo etiam eo, ad hunc qui ſequitur,

(k) Eſt illa vociferrtio, cujus JUVENALIS meminit. Vide ſupra §. XII.

(l) Obſerva hunc ipſum diem à PLUTARCHO in eodem libro, duobus aliis in locis etiam nominari, p. 635. & 655. Edit. Stephani, ut igitur dubitandi locus non ſit, quin haec ſit lectio genuina.

tur, *Tybi*, vel *Januarium*, pergendum erat. Nam ſecundum rationes anni fixi Aegyptiorum, quod (m) mox ad liquidum perducetur, ineunte *Tybi*, id eſt in confiniis *Decembris* & *Januarii*, Oſiris nondum putabatur inventus. Neque tamen minus certum eſt, ſolennitàtem *Oſiridis inventi*, praecedere menſem *Mechir*, vel *Februàrium*. Auſim ergo dicere, eſſe plus quam probabile, PLUTARCHUM ita ſcripſiſſe. Τῇ δὲ ἐννάτῃ ἐπὶ δέκα μηνὸς Τυβὶ, νυκτὸς ἐπὶ θάλασσαν κάτεισι: *Die vero* XIX. *Menſis Tibi, noctu ad mare deſcenditur.* Nempe hic contigit, quod etiam alias in hoc libro Plutarchi obſervavi, ut vitio librariorum, qui rerum iſtarum prorſus erant imperiti, nomen menſis exciderit.

§. XIV.

Mihi vero PLUTARCHUS ipſe, quem ſic, uti nunc monui, ſcripſiſſe, veroſimillimum eſt, nondum ſatis facit. Credo potius, optimum illum auctorem, cum ita ſcriberet, dormitaſſe, atque, dum in rebus minus obviis congerendis occupatus eſt, ex oſcitantia levem errorem commiſiſſe. Omnibus ſtudioſe expenſis, in eo mihi acquieſcendum putavi, maximam illam *Oſiridis inventi* ſolennitatem, ab Aegyptiis D. XI. *Tybi* vel VI. *Januarii* peragi conſueviſſe. Auctorem habeo EPIPHANIUM, ex quo id confici poſſe, confido. Apud eum quidem haec tantum leguntur, quae ad inventum Oſiridem non pertinere, multis videbuntur. (n) διόπερ

(m) Vide infra §. XVI.

(n) in Haereſi LI. quae eſt *Alogorum* §. 30. pag. 451.

διόπερ ΤΗ ΕΝΔΕΚΑΤΗ ΤΥΒΙ *κατ' αἰγυπτίȣς, πάντες ὑδρεύονται ὕδωρ, καὶ ἀποτιθεάσιν ἐν αὐτῇ τῇ αἰγύπτῳ καὶ ἐν πολλαῖς πατρίσιν. Quae cauſa eſt, cur Die XI. Tybi, omnes in Aegypto aquam hauriant, eamque ibidem, uti praeterea multis aliis in locis reſervent.* Operæ tamen pretium erit, obſervaſſe, ſermonem eſſe de Solennitate, in Aegypto, die certa, ab omnibus celebrata, idque Menſe TYBI, in quem feſtivitas inventi Oſiridis certo certius ingruit. Solennitatis illius pars erat *ὕδρευσις, aquatio*, quam etiam fuiſſe ceremoniam non ignobilem Pompae Oſiriacae, ex verbis PLUTARCHI, ſupra §. XIII. allatis, jam intelleximus. *Deſcendebatur* enim in illa *ad mare*, vel *ad aquam*, & *hauriebatur aqua potabilis.* Idem confirmabo alio doctiſſimi hujus Scriptoris loco, ubi ex Aegyptiorum traditionibus iſta refert: (o) *Ἔνιοι δὲ παμύλην τινὰ λέγȣσιν ἐν Θήβαις* (p) ΥΔΡΕΥΟΜΕΝΟΝ *ἐκ τȣ̃ ἱερȣ̃ τȣ̃ Διὸς Φωνὴν ἀκȣ̃σαι, διακελευομένην ἀνειπεῖν* ΜΕΤΑ' ΒΟΗ͂Σ, *ὅτι μέγας βασιλεὺς εὐεργέτης* ΟΣΙΡΙΣ ΓΕΓΟΝΕ. *Alii Pamylen quendam ajunt, cum Thebis e Templo Jovis AQUAM PETERET, vocem exaudiviſſe, qua juberetur MAGNO CUM CLAMORE ANNUNTIARE, OSIRIN, regem magnum & beneficum, NATUM ESSE.* Vides hic *ὕδρευσιν,*

(o) de Iſide & Oſir p. 633. Ed. Steph vel 355 Wechel.

(p) in Editionibus noſtris legitur *ὑδρευομένην*, tanquam *Pamyle* mulier eſſet. Sed mox PLUTARCHUS de *Pamyle* loquitur ceu viro *ἐγχειρήσαντος αὐτῷ τȣ̃ κρόνȣ*, & ſic iterum paulo poſt. Itaque lectionem hanc ſecutus, hic etiam ſcripſi *ὑδρευομένον.*

σιν, *aquationem.* Vides *magnum clamorem*, nato Oſiride editum. Vides denique ipſum *Oſirin natum.* An non haec in memoriam revocant illa JUVENALIS, quibus uſi jam ſumus?

> *Exclamare libet, populus quod clamat Oſiri*
> *invento.*

Quod ſi igitur loca PLUTARCHI adducta inter ſe, & tum cum EPIPHANII verbis attente conferas, manifeſtum evadet, omnes unam eandemque ſolennitatem in animo habere, niſi quod Epiphanius eam referat ad D. XI. Tybi, Plutarchus vero ad D. XIX. ejusdem menſis. Eſtne vero credibile, ſolennitatem tantam, per totam Aegyptum, ab omnibus, eodem menſe, intra paucos dies bis peractam fuiſſe?

§. XV.

Verum qua tandem ratione litem, quae eſt inter PLUTARCHUM, & EPIPHANIUM, componemus? Hic quidem ſolennitatem, uti jam vidimus, conjicit in D. XI. *Tybi*, vel VI. *Januar.* ille vero in D. XIX. *Tybi*, vel XIV. *Ianuarii.* Equidem in hac cauſa, miſſo PLUTARCHO, Epiphanii partes ſequi non verebor. Plutarchum aliquando, in re hujus generis, ſcribendo aberraſſe, nihil mirum. At Epiphanium in eadem re aberrare omnino non potuiſſe, ajo. Diſſerebat enim de re, Chriſtianornm omnium ore tum temporis celebrata, & ab omnibus in Oriente firmiter credita, Servatorem nempe noſtrum, D. XI. *Tybi*, vel VI. *Januarii*, quondam à B. Virgine Maria in lucem editum fuiſſe, & eodem

quoque

quoque die, poſt annos triginta, miraculo primo, verſae in vinum aquae, gloriam ſuam hominibus manifeſtaſſe. Addebant plerique, hoc quoque die, Dominum à Johanne Baptiſta, in Jordane tinctum fuiſſe. In hoc igitur error profecto committi non potuit. Scribit porro Epiphanius, eodem illo die, per totam Aegyptum, ſingularem prorſus aquae virtutem perſentiſci, quare ab omnibus hauriatur & domi recondatur. Neque in eo poteſt eſſe error. Nam mos ille à Sacerdotibus Iſidis in Aegypto primum ſancitus, poſtea ad Chriſtianos etiam tranſiit, perſuaſos, Dominum noſtrum illo ipſo die aquäm in vinum convertiſſe, hujusque miraculi ſuo etiam tempore paſſim extare veſtigia. Ex Aegypto conſuetudinem hanc ad alios quoque in Oriente Chriſtianos dimanaſſe, vel ex hoc CHRYSOSTOMI teſtimonio conſtat, digno quod etiam hic legatur. (q) *Hoc enim die*, inquit, loquens de VI. Januarii, *baptizatus eſt Dominus, eoque ſanctificavit aquam. Idcirco omnes in ſolennitate hac* (r) *media nocte aquatum eunt, & aquam hauſtam domi reponunt, ac in annum integrum cuſtodiunt. &c. &c.* Ex his igitur, & pluribus aliis, quae adferri poſſent, certo intelligitur, Epiphanium ea, quae

Eee de

(q) in Homilia *de Baptismo Chriſti*, Operum Edit. Montfaucon. Tom. II. p. 369. Ceterum morem illum hodieque in Oriente obſervari conſtat. Vide PAGII Criticam in Annales Baronii ad A. C. 29. Num. VII.

(r) Rogo lectorem, ut id obſervet. EPIPHANIUS rem hanc ſilentio praetermiſerat, ſed meminit ejus probe PLUTARCHUS adductus à me §. XIII. Ita Plutarcho etiam hic cum Epiphanio, aut cum re, quam tangit Epiphanius, pulchre convenit.

de ὑδρεύσει Aegyptiorum refert, recte omnino & vere, in D. XI. *Tybi* rejeciſſe. At Plutarcho in hujusmodi re levem errorem committere facillimum erat, levem enim errorem hunc, &, merito appello. Scripſit namque ΤΗ ΈΝνάτῃ ἐπὶ ΔΕΚΑ, pro eo quod ſcribi debuerat, & quod ſcripſit Epiphanius, ΤΗ ΕΝΔΕΚΑ'τῃ, in quo inter ſcribendum aberrare, homini tot variisque cogitationibus intento, quam non proclive erat?

§. XVI.

Cum iis, quæ hactenus obſervavi, tenor fabulae Aegyptiacae de Oſiride & Iſide, ſub cujus aenigmatibus & Symbolis, Sacerdotes Theologiam ſuam & Phyſiologiam vulgum celare conſueverant, exacte conſpirat. Fabulae illius, quam omnium accuratiſſime PLUTARCHUS in libro *de Iſide & Oſiride* literis mandavit, tale argumentum eſt. *Oſiris à Typhone ſociisque conjuratis occiditur D. XVII. Athyr.* (XIII. Novembr.) *Interemtum Oſirin Sacerdotes plangunt, luctumque ſuum variis ceremoniis demonſtrant. Iſis vero ex Aegypto in Phoeniciam proficiſcitur, ibi charum ſuum Oſirin quaeſitura.* Sic reliqua pars Menſis *Athyr* & *Choeac* tranſigitur. Sequenti *menſe Tybi* (vel Januario) *redit ex Phoenicia in Aegyptum, & quidem* D. VII. (id eſt II. Januarii) cujus rei memoriam (s) die illo quotannis Aegyptii recolebant. *Paucis autem diebus poſt, ecce quaeſitum ſuum maritum invenit.* Tricas fabularum nunc non moror, contentus indicaſſe, hanc eſſe rei ſummam. Si igitur,

(s) PLUTARCHUS de Iſid. & Oſir. pag. 662. Ed. Steph. 371. Wechel.

tur, ut ſabulae hae tradunt, Iſis D. VII. *Tybi*, vel II. *Januarii*, in Aegyptum appulit, & brevi poſt Oſirin invenit, quis non judicabit, egregie cum reliquis fabulae partibus concinere, ſi dicatur, factum id eſſe D. XI. *Tybi*, ideſt VI. *Januarii.* Et profecto die illo ipſo, Aegyptios ſolennitatem quandam inſignem Romae peragere ſolitos fuiſſe, ex eo etiam colligo, quod in praeſtantiſſimo illo *Kalendario Romano*, quod ſub Imp. Conſtantio, Conſtantini M. filio compoſitum fuit, in *Januario* haec legantur. VIII. *Idus Januarii* (s. D. VI. Januar.) *dies Aegyptiacus.* Nam per *dies Aegyptiacos*, ſæpius in Kalendario illo memoratos, intelligi Feſtivitates religioſas Aegyptiorum, peculiari Diſſertatione, quæ iſtam mox ſequetur, argumentis non contemnendis evincam.

§. XVII.

Auſimne vero & iſtud libere profiteri, quód mihi jam dudum in mentem venit? verba illa, quae tanquam ex MANETHONIS Dynaſtia ſecunda, (t) AFRICANUS, ac ſpeciatim (u) EUSEBIUS, hunc in modum referunt, *ἐπὶ τȣ̃ ἑβδόμȣ μυθεύεται τὸν νεῖλον μέλιτι κεκραμμένον ἡμέρας ιά ῥυῆναι. Sub ſeptimo* rege, *Nilum melle temperatum, XI. diebus fluxiſſe comminiſcuntur*, re vera ad noſtrum negotium ſpectare? Manethoni enim multa aliena, non modo ab Africano primum & Euſebio, ſed poſtea etiam ab otioſis Monachis, adtexta fuiſſe, & ſaepe per ingentem errorem vix dubitabit unquam

 quis-

(t) apud SYNCELLUM in Chronographia p. 55.

(u) apud eundem SYNCELLUM p. 55. ſin. 56. & in Editione SCALIGERI p. 14.

quisquis Dynaſtias Scriptoris illius Aegyptii, uti conſervatae ſunt, accurate & meditate legere dignatus fuerit. Hujus furfuris etiam eſſe, quae nunc citavi, magnopere ſuſpicor. Quidam ex vetuſtis Chriſtianis, facilem nimis aurem, Gnoſticis, hujusmodi fabellarum, ut credo, auctoribus praebuerant, ſingulari prorſus & vere miraculoſa Providentia Dei fieri, ut illo die, quo Dominus noſter Chriſtus Jeſus, Bethlemi primum natus, deinde etiam in Jordane baptizatus, ac per miraculum etiam aquae in vinum converſae illuſtri modo glorificatus fuerat, Die videlicet VI. *Januarii*, multi per orbem fluvii, ac ſigillatim Nilus in Aegypto, virtutem vini adſciſcerent, ac lacte veluti & melle fluerent. Rem enim hanc (w) EPIPHANIUS, ut indubiam, ſua aliorumque experientia teſtatam, refert. Re ipſa traditiones hujusmodi fabulis Ethnicorum deberi, & Chriſto Domino antiquiores eſſe, (x) CASAUBONUS abunde probavit. Verum Gnoſticorum fraudes, & credulitas Chriſtianorum quorundam effecerunt, ut res à Sacerdotibus Iſidis in Aegypto, & Bacchi in Græcia, conficta, & in ſe prorſus imaginaria, non tantum ut vera crederetur, ſed etiam baptiſmo ac Miraculis Chriſti, in acceptis ferretur. Ipſam hanc rem tangi in illis verbis, quae non tam ex AFRICANO & EUSEBIO, quam potius eorum interpolatoribus nunc retuli, mihi veroſimile fit. Quando igitur lego, Nilum *diebus* XI. melle temperatum

(w) Haereſi LI. §. 30.

(x) Exercitat. XIII. adverſus Baronium, num. XXII.

tum fluxiſſe, id ex eo hauſtum opinor, quod *Die XI. Tybi* Nilus traderetur vim plane ſingularem, & mellitam veluti dulcedinem adipiſci. Quisnam vero fons erroris tam putidi extiterit, dicere omnino nequeo. Etiam conjecturae huic in univerſum, quam non niſi pro conjectura haberi velim, ſi cordato lectori diſpliceat, non invitus renuntiabo.

§. XVIII.

Dum in iſtis verſor, memoriam forte ſubit, quod non ita pridem, in itinerario auctoris cujusdam recentis relatum legi, quodque, ſi veritati eſſet conſentaneum, non mediocriter, ea quae diximus, confirmaret. Auctoris hujus verba, ne forte incautum quempiam decipiant, e germanico latine converſa appono. Loquens de Inſulis Moluccis in India Orientali, illic locorum ſe hæc accepiſſe teſtatur. (y) *Pro certo affirmatur, ex hiſce regionibus veniſſe celebratos tres illos reges, qui ex Oriente, Hieroſolymam, & inde Bethlehemum petierunt eo fine, ut Jeſum infantem illic adorarent. Erant enim inter Aſtronomiae cultores, ſecundum diſciplinam Aegyptiorum, tum temporis facile Principes, eodemque tempore, Romae imperante Tiberio, audiverant, apud Judaeos extare vaticinia, de novo rege tum exorituro, quem potentem fore in mundo Monarcham, resque Judaeorum feliciter reſtiturum eſſe, crediderant. Superſunt hic antiquiſſima gentis iſtius Monumenta, arborum corticibus inſcripta,*

 reique

(y) Carl Friedrich Behrens Reiſe durch die Süd-Länder. Franckfurth 1737. Sect. XVIII. p. 168. 169.

reique hujus hiſtoriam complectentia. Quo tempore apud nos memoria trium regum feſtiva recolitur, (D. VI. Januar.) *ipſi FESTUM ASTRORUM celebrant. Nautae noſtri Belgici, tempore illo circumcurſitant, ſtellam geſtantes. Reges autem cibum & potum, & alia praeterea dona illis praebent, quo facto, Feſtum more gentilium celebratur. Rex quidem Ternatenſis, nomen ſuum Religioni Chriſtianae addixit, verum duo reliqui ſuperſtitiones Ethnicas etiamnum ſequuntur. Non ſemel incidi in Sacerdotes Muhammedanos in India, qui peregrinationem Meccanam aliquoties ſuſceperant, aut qui in Academia illius urbis literis operam dederant, inque hiſtoria gentium Aſiaticarum non parum verſati erant. Ex horum relationibus accepi, extare in Bibliotheca Meccana Chronicon de rebus geſtis regum Moluccanorum, in quo memoriae proditum ſit, tres reges, ante permulta Secula per Arabiam in Judaeam profectos fuiſſe, cum in Coelo ſigna ac prodigia penitus inſueta obſervaſſent, ac tempore non ita multo interjecto, feliciter in patriam rediiſſe.* Quod ſi igitur relationibus hiſce fidem adhibemus, in India olim, ab Aſtronomis antiquiſſimis, ſecundum diſciplinam Aegyptiorum inſtitutis, D. VI. *Januarii* celebratum fuit *Feſtum Aſtrorum*, quod quam ſimile ſit Feſto *Oſiridis inventi*, pluribus explicare opus non eſt. Verum non diſſimulabo, antiquas Moluceanorum relationes mihi magnopere ſuſpectas eſſe. *Tres* inſularum Moluccarum *reges* præcipui, qui in traditione illa ſubinnuuntur, Ternatenſis, Tidorenſis, & Batſianenſis, non ſacris idolorum favent, quod hic ut certum ponitur, verum ante hos trecentos fere an-

nos,

nos, religioni Muhammedanae ſe initiari paſſi ſunt. Teſtantur hoc (z) Luſitani, qui ex Europaeis noſtris, omnium primi oras has adierunt, idemque poſtea, peregrinatores ceteri, qui illos ſecuti ſunt, confirmarunt omnes. Feruntur quoque inſularum Moluccarum incolae ſupra modum rudes, literarumque omnium expertes eſſe. Quae cauſa eſt, ut fides jactatorum illorum Annalium Moluccenſium, apud me magnopere vacillet.

§. XIX.

Unam ſupereſſe hic difficultatem video, quam tacitus præterie non poſſum. Dixi nempe, Tabulae Bembinae clauſulam, quam nunc illuſtrandam ſumſi, ſpectare ad Solſtitium hybernum, illiusque tempus deſignare. Quod, quomodo verum eſſe poterit, ſi Solennitas iſta Diei VI. Januarii propria fuerit, quæ a vero Solſtitio tam longe abeſt? Præterea, an non cuique figuras Tabulæ noſtrae, paulo attentius contemplanti, vero videbitur ſimillimum, imaginem ultimam, literis YY. diſtinctam, rem nobis deſignare diverſam ab illa, quam imago TT. oculis noſtris ſubjicit? Non adeo difficile erit, ſcrupulos hoscc, qui ſe omnibus ſponte offerunt, ita eximere, ut dubitandi argumentum omne tollatur. Non vehementer repugnabo, ſi quis exiſtimaverit, duas has imagines res etiam diſtinctas cogitationi noſtræ objicere. Sed hæc tamen cum iis quæ hactenus disputavi, conciliari rectiſſime poterunt. In imagine TT. *Solſtitium hybernum* repraeſentari, vix credo fore quenquam, qui in dubium vocare voluerit. Deſigna-

(z) Vide MAFFEI Hiſt. Indic. Lib. V. p. 225. 226.

Deſignatur itaque hic ipſum verum Solſtitii hyberni tempus. Imago vero YY. nos admonet Solennitatis publicae, occaſione hac inſtitutæ, ſed à die Solſtitiali nonnihil remotae. Adhuc propius ad ingenium Tabulae noſtrae accedere videbimur, ſi ita exiſtimaverimus, in imagine TT. adumbrari ſolennitatem ſacram, ipſo Solſtitiali diè, à Sacerdotibus, Aſtronomiae ſtudioſiſſimis celebratam. Hanc in animo habuiſſe videtur MACROBIUS, ubi iſta memoriæ prodidit, ſupra jam allata §. V. *ut Sol parvulus videatur hyemali Solſtitio, qualem Aegyptii proferunt ex Adyto die certa, quod tunc breviſſimo Die veluti parvus & infans videatur.* Hæc erat ſolennitas Sacerdotibus, alumnis ipſorum, & initiatis propria & peculiaris, ac vere Philoſophica. Imago vero YY me judice, Symbolum erit Feſtivitatis publicae, aliquanto poſt à toto populo, religioſe & cum gaudio concelebratae.

§. XX.

Enim vero id quod dixi, à genio & conſuetudine veterum alienum omnino non eſt. Conſuetudinis hujus, non in Aegyptiorum modo, ſed Romanorum quoque Faſtis, veſtigia repèrire licet. Romani quondam Solennitati hyemalis Solſtitii in Faſtis ſuis dicaverant Diem XXV. Decembr. Ille in vetuſto *Kalendario Romano* vocatur *Natalis invicti* Solis. Eo die *Solem* dici ſolere *novum* (a) SERVIUS Grammaticus non ignobilis, obſervat, quia, ut (b) idem teſtatur, die illo *Solſtitium hyemale*

(a) in VIRGILII Lib. VII. Aeneid. 720.

(b) Idem in Lib. I. Georgic. 100.

hyemale celebrabatur. Non neſciebant Romani, Solſtitium verum, ſolere diem iſtum antevertere, & tamen ſolennem illius memoriam collocabant in D. xxv. Decembr. propter rationem, quam hunc in modum exponit JULIANUS Imperator (c) *Non enim quo die Sol converſionem facit, ſolenne illud peragi voluerunt majores noſtri; Sed quo demum manifeſtus eſt omnibus illius ad ſeptentriones à meridie progreſſus. — Itaque ſtatim exacto ultimo menſe, qui Saturno dicatus eſt, ante initium anni, magnificentiſſimos ludos in honorem Solis committimus, quos invicto Soli nuncupamus.* Simile quid Aegyptiis etiam viſum eſſe, ut credam, pluribus rationibus adducor, ita tamen, ut verum Solſtitii hyemalis diem inter ſe concelebrarent Sacerdotes, in alium vero diem, Solennitatem ejus publicam rejicerent, Diem nempe XI. *Tybi*, vel VI. *Januarii*, idque in Tabula noſtra adumbratum eſſe cenſeo.

§. XXI.

Non invitus fateor, Diem VI. *Januarii*, à vero Solſtitii hyberni tempore, paulo longius remotum eſſe, quod novam difficultatem parere poſſe videtur. Sed cogitandum erit, rationem anni Sacri Aegyptiorum, ſive Feſtorum ab ipſis antiquitus conſecratorum, id omnino flagitaſſe. Inter Oſiridis caedem, inter ejusdem inveſtigationem & inventionem, juſta debuit utique obſervari temporis menſura, fundata in placitis Theologiae & Phyſiologiæ Aegyptiorum. Ea ſine dubio cauſa eſt, cur reditus Iſidis e Phoenicia in Aegyptum, quod

(c) Oratione IV. Operum Edit. Spanhemii p. 156.

ſupra jam oſtendimus, §. XV. à gentis hujus Theologis in Diem II. *Januarii*, rejecta fuerit, unde per ſe jam ſequebatur, ipſam Oſiridis inventionem, & rei ejusdem ſolennem teſtificationem, non niſi poſt aliquot dies ſuccedere poſſe. Itaque ſatis commode Feſtivitas hæc in D. VI. *Ianuarii* collocata eſt. Si vetuſtiſſimi Aegyptiorum Theologi, (d) quibus magnopere curae cordique fuerat, ut ordo Feſtorum per totum annum eſſet vagus & ambulatorius, praevidere potuiſſent venturum eſſe tempus, quo annus ſuus ex vago redderetur fixus, ſeriem Feſtorum aliter forte diſpoſuiſſent. Verum poſtea, facta illa olim diſpoſitio & ordinatio, quia rationibns Sacrorum ſine dubio innixa fuit, in anno etiam fixo retineri debuit.

§. XXII.

Scimus præterea (e) Alexandrinos omnium primos, neglecto antiquo Aegyptiornm anno vago, fixum, & in uſu civili, & in Sacris introduxiſſe. Mirum igitur nemini videri de-

(d) Notisſimus eſt eam in rem GEMINI locus, in PETAVII Uranologio p. 33., & ab eruditorum permultis allatus. Vide tamen ſi placet SELDENUM de Diis Syris Synt. I. cap. IV. p. 144. &c. & DODWELLI Appendicem ad Diſſertationes Cyprianicas §. IV. V. SCHOLIASTES *Germanici* refert, reges Aegypti olim à Sacerdotibus inaugurandos, *jure jurando adigi* conſueviſſe, *neque menſem neque diem intercalandum, quem in feſtum diem immutarent, ſed CLXV. dies peracturos, ſicut inſtitutum eſt ab antiquis* pag. 110. Edit. Sanct. Andreanae.

(e) Vide DODWELLUM loc. ſupra citato. Adde *la Chronologie de l'hiſtoire ſainte de Mr. DES VIGNOLES* Tom. II. p. 703. &c. &c.

debet, Græculos hos, qui jam olim ſub regno Ptolomæorum, plurimas Gentis ſuæ Doctrinas & ſuperſtitiones in Theologiam atque Sacra Aegyptiorum invexerant, nunc etiam, ubi anni forma mutanda & figenda erat, opportunitate hac uſos eſſe, resque ſic diſpoſuiſſe, ut inter Oſirin Aegyptiorum, Bacchumque ſuum, uti nec minus inter religioſas ſolennitates, Numini utrique ſacratas, ſumma appareret convenientia. Græcos certe plurimas & præcipuas in honorem Bacchi ſolennitates, ea anni tempeſtate celebraſſe, quæ Feſto Oſiridis, in anno Aegyptiorum fixo dedicata fuit, multis modis teſtatum eſt. (f) CASAUBONUS qui id quoque obſervat, hæc veteris Grammatici verba adducit. (*) *Lenæon* menſis *eſt Januarius: vocatus autem eſt Lenæon, quia Baccho torcularium præſidi hoc menſe feſtum celebrant, quod Ambroſiam appellant.* Quibus ſimilia habet *Etymologici magni auctor*, in Ληνάιων. Similiter de Templo quodam Bacchi in Arcadia loquens (g) *PAUSANIAS* ait, *Sacra illic fieri Baccho tempore hyberno,* ἐν ὥρᾳ χειμῶνος. Ubi obſervatu indignum non eſt, *PTOLOMAEUM* in libro *de Apparentiis fixarum*, (h) ex *EUCTEMONE* & *PHILIPPO*, Græcis Aſtronomis, notare ad D. XI. *Tybi*, ſive VI. *Januarii*, tum eſſe μέσον χειμῶνα, *mediam hyemem.*

(f) Exercit. XIII. in Baronium num. XXII.

(*) Video verba haec eſſe MOSCHOPULI in Scholiis græcis ad HESIODI Opera & dies p. LXVIII. a. Edit. Venetae Trin. Cavelli.

(g) in Arcadicis p. 252. Edit. graecae Sylburgii.

(h) Haec verba ex Codice MS. Saviliano ſupplet FABRICIUS in Biblioth. græca Vol. III. p. 440. Deſunt enim in Editione Petavii, Uranolog. p. 79.

rem. Addere poſſumus, Feſta in honorem Bacchi peracta, plerumque apud græcos, in D. VI. *Januarii* ingruiſſe. Colligo id ex teſtimonio PLINII, hæc nos docentis. (i) *In Andro inſula templo Liberi patris fontem Nonis Januarii* (D. V. Januar.) *ſemper vini ſapore fluere Mutianus ter Cos. credidit: Dios tecnoſia vocatur.* En feſtum in memoriam nativitatis Bacchi celebratum D. V. Jannarii, ideoque *Dios tecnoſia* nucupatum, quo fontis aqua in vinum mutari credebatur! Quam non ſimilia hæc ſunt iis, quae in Feſto *Oſiridis inventi*, aut *renati* apud Aegyptios peragebantur? Inter Feſta etiam utriusque gentis, non eſt niſi unius diei diſcrepantia, quæ forte ex diverſa computandi dierum principia ratione deduci poſſit. Alia plura hujusmodi Feſta, & eodem, ut videtur, tempore, Græcos conſecraſſe, vel iſta DIODORI teſtari poſſunt. (k) *Teji & hoc argumento probant, Bacchum apud ſe natum eſſe, quod adhuc ſtato tempore, fons per ſe Scaturiens, in urbe ſua, fragantiſſimum e terra vinum effundat.* Pluribns hæc omnia illuſtrari & explicari poſſent; ſed obiter nunc tantum adferuntur, neque illis immorabor.

§. XXIII.

Hanc ego veram rationem fuiſſe exiſtimo, ob quam Gnoſtici, primi inter Chriſtianos, natale Servatoris noſtri Feſtum vel Epiphania D. VI. Januarii celebrare occoeperint. Novimus hoc ex teſtimonio CLEMENTIS ALEXANDRINI,

(i) Lib. II. hiſtor. natur. cap. CIII.
(k) Lib. III. p. 199. fin. Edit. Rhodom.

NI, qui de *Baſilidianis* ſcribit, (l) *quod diem* xv. *Tybi, alii vero Diem XI. memoriæ baptismi Chriſti conſecraverint.* Hæc Clemens non omnino accuratiſſime, ut credo. Primo enim cenſeo, diem illum, de quo loquitur, pari modo, memoriæ & nativitatis & baptismi Chriſti, Sacrum fuiſſe. Saltem tempore inſecuto, Chriſtianos eodem illo die, VI. *Januarii*, utramque memoriam, in Aegypto, & in plerisque Orientis partibus, ſancte celebraſſe, extra omnem dubitationis aleam poſitum eſt. Nempe à Gnoſticis conſuetudo hæc, quæ viſa fuit traditione certa inniti, ad alios dimanavit. In eo vero CLEMENTEM puto à vero aberraſſe, quod memoriæ prodiderit, Gnoſticos memoriam baptismi Domini peragere, non uno eodemque die, alios quippe id facere D. xv. *Tybi*, (*X. Januar.*) alios vero D. xi. *Tybi* (*VI. Januar.*) Incidit Clemens noſter in Codicem depravatum, in quo pro *ιά.* uti ſcribi debebat, id eſt xi, ſcriptum erat, errore perquam facile *ιέ.* ideſt xv. Error hicce inter ſcribendum à librario admiſſus, Clementem ipſum in erroris Societatem pertraxit. Ceterum Gnoſtici omnes Diem vi. *Januarii* memoriæ & nativitatis, & baptismi Domini, conſecratum voluere, eodemque die ſuos baptismo frequentiſſime immergere ſolebant, cujus rei, veſtigia ſatis luculenta, etiam in *Gemmis* ipſorum, quae vulgo appellantur *Abraxeae*, oſtendere poſſum. Voluerunt igitur Gnoſtici, eodem die, quem vetus Aegyptiorum Superſtitio, cultui Solis dedicaverat, memoriam ad-

 ven-

(l) Stromatum Lib. I. p. 340.

ventus Chriſti Domini, *Solis Iuſtitiae*, & lætiſſimorum ejus beneficiorum recolere. Hoc ipſum eorum inſtitutum, quamvis non ab omni parte recte perſpectum, tangere & vituperare videtur IRENAEUS, quando de ipſis hæc refert. (m) *Ad omnia Gentilium Feſta & oblectamenta, quae ad idolorum bonorem cultumque celebrantur, ipſi conveniunt primi.* Id vero aliter cave accipias, quam quomodo nunc à me expoſitum eſt.

Pauli Erneſti Jablonski

Commentatio de Diebus Aegyptiacis, in vetuſto Kalendario Romano commemoratis.

§. I.

IN conjectaneis meis ad Clauſulam Tabulae Bembinae, vel Jſiacae, §. XVI. uſus ſum auctoritate vetuſti *Kalendarii Romani*, ſub imperio Conſtantii, circa an. 354. compoſiti, ut probarem, Aegyptios Romae D. VI *Januarii*, vel D. XI. *Tybi*, Feſtum aliquod Genti ſuæ ſolenne celebraſſe. Id enim ex hisce *Kalendarii* illius verbis collegi. IV. *Non. Januar. dies Aegyptiacus.* Equidem inter eruditos hactenus nondum penitus convenit, quidnam per

(m) *Adverſus hæreſes* Lib. I. cap. VI. §.3. Edit. Maſsueti.

per *dies* illos *Aegyptiacos* intelligere oporteat. LAMBECIUM certe virum doctiſſimum, eum ea de re ageret, ita judicaſſe lego. (a) *De Die Aegyptiaco, cujus mentio in hoc Calendario paſſim occurrit, nondum mihi ſatis liquet.* Non ignorabat vir melioribus literis egregie politus, quæ eſſet apud alios quosdam ſcriptores, *dierum Aegyptiacorum* ſignificatio, & quomodo viri eruditiſſimi eos eſſent interpretati. Verum quo erat ingenii acumine, pervidit facile, vulgarem illam vocis hujus acceptionem, in *Calendario Romano*, quod illuſtrandum ſumſerat, locum omnino habere non poſſe. Quare maluit ingenue fateri, de *die* illo *Aegyptiaco, ſibi hactenus nondum ſatis liquere.*

§. II.

Praeter Lambecium ceteri omnes, in quos quidem ego incidi *dies Aegyptiacos* interpretantur *dies* expoſitione aſtrorum *infauſtos*, ideoque ad inchoandum vel perficiendum quicquam inidoneos, de quibus, ut alios nunc taceam, (b) SALMASIUS inprimis erudite & diligenter commentatus eſt. Apud LINDENBROGIUM, *dies* hi *Aegyptiaci*, in veteri membrana, ordine erant notati, quos utinam nobiscum communicaſſet. Initium, ut ipſe refert, in membrana ita ſonabat: (c) INCIPIUNT DIES AEGYPTIACI IN QUIBUS NUL-

(a) In Annotat. ad Kalendarium Conſtantii Imp. p. 305. Edit. Schurtzfleiſchii.

(b) In libro *de Annis Climactericis*, p. 815. 816. &c.

(c) LINDENBROGIUS Obſervation. in Ammianum *Marcellinum* à ſe editum Lib. XXVIII. p. 184.

NULLA OPERA INCIPERE DEBES. Obſervatione autem indignum non eſt, quod Scriptores plerique, qui *dierum Aegyptiacorum*, in ſenſu illo, commeminerunt, ſint Eccleſiaſtici. Illos inter eſt (d) AMBROSIUS, qui in Epiſtola Paſchali ad Epiſcopos Aemiliae ſcribit, pleroſque Chriſtianos more Paganorum ſolere *varios quoque curſus Lunae obeundis negotiis commendare, vel cavere quoſdam dies; quemadmodum plerique* (e) *poſteros DIES, vel AEGYPTIACOS declinare conſuєverunt.* Nota ſunt (f) quoque & ſæpius ab eruditis adferuntur hæc B. AUGUSTINI verba. *Plena ſunt conventicula noſtra hominibus, qui tempora rerum agendarum à Mathematicis accipiunt. Jam vero ne aliquid inchoetur, aut ædificiorum, aut hujusmodi quorum libet operum, DIEBUS QUOS AEGYPTIACOS VOCANT, ſæpe etiam nos monere non dubitant.* Extat (g) Conſtitutio aliqua Synodalis AUGERII MONTEFALCONII Epiſcopi Conſeranenſis in Gallia, qui Seculo XIII. floruit, in qua etiamnum iſta legas. *DIES quoque AEGYPTIACI, conſtellationes, lunationes, Calendæ Januarii, initia menſium, dies, menſes, annus, curſus Lunae, Solis & ſiderum, ſuperſtitioſe obſervari non debent, credendo videlicet, in illis virtutem ineſſe, quoniam ſuperiora cau-*

ſæ

(d) Citatus à SCHURTZFLEISCHIO, in notis ad Kalendarium Romanum p. 321.

(e) id eſt *dies poſtridie Calendas, nonas, & idus.* Vide locum MACROBII citandum mox §. III.

(f) In Epiſtolam ad Galatas cap. IV. Operum Tom. IV. Col. 1234. Edit. Baſil. 1556.

(g) Eam vulgavit D. BERN. de MONTFAUCON Tom. III. Supplement. Antiquit. p. 201. & emendatius in nova Bibliotheca Bibliothecarum MSS. Codicum Tom. II. p. 1157.

ſa non ſunt ſed ſigna. In omnibus hiſce locis dubium non eſt, quin nomine *dierum Aegyptiacorum* deſignentur tales, qui judicio Aſtrologorum, ex ſiderum ſitu & ad ſe invicem relatione, pro infauſtis habendi ſunt. Hos utique in mente etiam habebat MARINUS Platonicus, qui de Proclo ſuo obſervat. (h) *Aegyptiorum nefaſtos dies, diligentius obſervabat, quam illi ipſi.*

§. III.

Quae etſi ita ſint, ego tamen ſemper etiam atque etiam dubitavi, utrum in *Calendario* noſtro, *dierum Aegyptiacorum* eadem ſignificatio eſſe poſſet. Si quis enim *Calendarium* iſtud à capite ad calcem attente perlegendum ſumſerit, in eo toto non videbit annotatas, niſi Solennitates, ſive ſacras, ſive civiles, Romanorum publicas, Senatus auctoritate aut decretas, aut approbatas. Quid? an Solennitatibus hujus generis, putabimus accenſeri etiam poſſe dies, quorum exiſtimatio nulla alia re nititur, quam febricitantis cujusdam Aſtrologi decretis, (i) cujus praeterea calculi, ab aliorum in hac arte magiſtrorum rationibus non parum diſſident, ut igitur decretis his nihil vanius aut incertius fuerit. Romani ipſi, ex edicto Pontificum dies quosdam, experientia, ut credebant, edocti, pro atris haberi volebant, nempe (k) *poſtridie omnes Calendas, nonas idus*, quas etiam Auguſtum Impera-

(h) In vita Procli cap. XIX. ubi vide etiam notas FABRICII p. 36. Edit. Anglic.

(i) Vide rei hujus exempla §. V.

(k) MACROBIUS Saturnal. Lib. I. c. XVI. p. 186.

ratorem religioſe obſervaſſe, (l) SUETONIUS memoriæ prodidit. In *Conſtitutione Synodali*, cujus §. ſuperiori mentio eſt facta, *dies* hi *Romani*, cum *diebus* Aſtrologorum *Aegyptiacis*, rectiſſime prorſus conjunguntur & conferuntur, & tamen dierum hujusmodi, quos religio Romanorum expavescere jubebat, nullam in *Calendario* noſtro rationem haberi videmus. Quis igitur facile ſibi perſuaſerit, *diebus Aegyptiacis*, ſive atris & infauſtis Aſtrologorum, inter publicas Romanorum celebritates, locum tamen fuiſſe aſſignatum? Credat Judaeus Apella.

§. IV.

Tanto autem magis in illa, quam dixi, ſententia confirmor, quod artes ac disciplinas Aſtrologorum, ſive, uti à Romanis vocantur, Chaldaeorum, Magorum, Mathematicorum, omnes ſeveris legibus prohibitas, & ex urbe proſcriptas ſemper fuiſſe, meminerim. Regnante Tiberio, etſi is conſortio Mathematicorum non parum delectaretur, *facta* tamen *de Mathematicis Magisque Italia pellendis Senatus Conſulta*, (m) *TACITUS* ſcriptum reliquit, qui idem teſtatur, ſub imperio Claudii, (n) *de Mathematicis Italia pellendis factum Senatus-Conſultum atrox.* Has vero leges etiam poſt id temporis repetitas fuiſſe & in vigore perſeveraſſe, vel unus (o) DO-

(l) in *Octavio* cap. 92.

(m) Annal. Lib. II. c. 32.

(n) Annal. Lib. XII. c. 52.

(o) Lib. VII. de Officio Proconſulis, in egregio fragmento, quod reperitur in *Collatione Moſaicarum & Romanarum legum* antiqua Pithoeana Tit. XV. p. 73. 74.

DOMITIUS ULPIANUS nos docere poterit. *Praeterea*, inquit is, *interdicta eſt Mathematicorum callida impoſtura & obſtinata perſuaſio. Nec hodie primum interdici eis placuit, ſed vetus hæc prohibitio eſt. Denique extat Senatus-Conſultum* (p) *Pomponio & Rufo Coſs. factum, quo cavetur, ut Mathematicis, Chaldæis, hariolis & ceteris, qui ſimilem* (q) *incertum fecerunt, aqua & igni interdicatur, omniaque bona eorum publicentur. —— Sed fuit quæſitum, utrum ſcientia hujusmodi hominum puniatur, an exercitia & profeſſio. Et quidem apud veteres dicebatur profeſſionem eorum, non notitiam eſſe prohibitam. Poſtea variatum.* (r) *Non diſſimulandum eſt, nonnunquam irrepſiſſe in uſum, ut etiam profiterentur & publice* (s) *proponerent. Quod quidem magis per contumaciam & temeritatem eorum factum eſt, qua auſi erant vel conſulere vel exercere, quam qui fuerat permiſſum.* Equidem nunquam defuere, etiam inter Imperatores, viroſque principes orbis Romani, qui decreta Mathematicorum Aſtrologica colerent vehementer & ſuſpicerent; verum leges tamen publicae ſemper ſubſtiterunt, quod ab ULPIANO vidimus obſervatum. Unde TACITUS de Mathematicis loquens, acute, ut ſolet, (t) *genus hominum*, inquit, *potentibus infidum, ſpe-*

(p) Anno Tiberii Imp. quarto, unde patet eſſe illud SCTtum, cujus modo ex TACITI Annal. Lib. II. c. 32. mentio facta eſt.

(q) PITHOEUS in notis corrigendum conjicit *artem*. Ego malim *quaeſtum*.

(r) Ita recte locum hunc emendat SALMASIUS in notis ad Scriptores hiſtoriae Auguſtæ Tom. I. pag. 927.

(s) Secutus & hic ſum emendationem SALMASII.

(t) Hiſtoriar. Lib. I. c. 22.

ſperantibus fallax; quod in civitate noſtra & vetabitur ſemper & retinebitur. Et illo ipſo Conſtantio Imperatore, quo regnante *Kalendarium* noſtrum editum eſt, Edicta priora adverſus Mathematicorum disciplinas, novis ſtabilita fuiſſe, teſtantur ipſius hac de re leges, in (u) CODICE THEODOSIANO ſuperſtites. Eſtne igitur probabile, in *Calendario* Romano, publico, ut videtur, uſui deſtinato, inter maximas urbis principis Solennitates, numerari etiam dies, quorum nulla poteſt eſſe auctoritas, quam quae ex disciplina Mathematicorum, tot ſeveris legibus proſcripta & damnata, petitur?

§. V.

Quod ſi autem *dies Aegyptiacos* Kalendarii Romani, cum *diebus Aegyptiacis* Aſtrologorum accuratius conferre, operæ pretium ducamus, quis eſt, qui non illico animadvertere cogatur, rationem horum dierum, à ſe invicem, toto coelo differre? Duos enim *dierum Aegyptiacorum*, quos Aſtrologi ſic vocant, laterculos nobis ſuppeditavit (w) SALMASIUS, quos cum Kalendario noſtro comparare licet. In altero eorum hos tanquam *dies Aegyptiacos* notatos deprehendimus

Januarii	*Dies*	2	&	4.
Februarii	*D.*	2	&	26.
Martii	*D.*	4	&	20.
Aprilis	*D.*	3	&	20.
Maji	*D.*	7	&	22.
Junii	*D.*	3	&	12.

Julii

(u) Libro IX. Tit. XVI. num. IV. V. VI.
(w) De annis Climactericis p. 816. 817.

Julii	*D.*	6	&	22.
Auguſti	*D.*	4	&	15.
Septembris	*D.*	3	&	14.
Octobris	*D.*	3	&	21.
Novembris	*D.*	5	&	11.
Decembris	*D.*	3	&	14.

Si jam laterculum hunc comparemus cum *diebus Aegyptiacis Kalendario Romano* annotatis, quodnam poterimus aliud ferre in hac cauſa judicium, quam quod SALMASIUM ipſum tuliſſe videmus, hocce nempe. (x) *Nihil eſt, quod conveniat in hac adnotatione dierum infauſtorum, cum illa quæ in Calendario eſt Conſtantini, præter unum diem, nempe ſecundum Januarii, qui in utraque recenſione infauſtus notatur.* Pace tamen magni SALMASII dictum ſit, *præter ſecundum diem Januarii*, alios eſſe dies, in laterculo, & in *Calendario Romano*, qui inter ſe conveniant, videlicet III. *Aprilis*, VI. *Iulii*, III. *Octobris*, & XIV. *Decembris.* Hæc caſu ita contingere potuiſſe, quivis intelligit. Verum quanta non, quaeſo, eſt discrepantia inter *dies Aegyptiacos*, Kalendarii Romani, & *dies Aegyptiacos* Aſtrologorum, quae ſupereſt? Alium *dierum Aegyptiacorum* laterculum SALMASIUS nobis eodem loco offert, quorum haec eſt ſeries

 Januarii

(x) SALMASIUS ubi ſupra p. 817.

Januarii	*Dies*	2	&	4.
Februarii	*D.*	16	&	21.
Martii	*D.*	4	&	20.
Aprilis	*D.*	3	&	20.
Maji	*D.*	6	&	20.
Junii	*D.*	4	&	18.
Julii	*D.*	6	&	20.
Auguſti	*D.*	1	&	5.
Septembris	*D.*	1	&	20.
Octobris	*D.*	3	&	20.
Novembris	*D.*	5	&	11.
Decembris	*D.*	3	&	24.

in quo laterculo, non major quam in praecedente apparet cum *Calendario Romano*, in notatione *dierum Aegyptiacorum* conſpiratio. Alii igitur omnino ſunt *dies Aegyptiaci*, quos Aſtrologorum filii nos cavere jubent, alii, quos à Romanis obſervatos fuiſſe, *Calendarium Conſtantii* teſtatur.

§. VI.

Neſcio tamen, quo jure dies illi infauſti, quorum duos laterculos SALMASIUS produxit, & quos vocat *dies Aegyptiacos*, nomen hoc re ipſa mereantur. Equidem non dubito, quin Aſtrologi illi, quibus laterculos debemus, placita Aegyptiorum, in genere, ſecuti fuerint, alioquin dies ab illis notati, *Aegyptiaci* dici non potuiſſent. Verum gente ſuſpicor fuiſſe Græcos non Aegyptios, ac praeterea propriis ſuis cogitatis & meditatis videntur non parum indulſiſſe, unde

factum

factum eſt, ut in uno eodemque negotio, duo laterculi tam inſigniter à ſe invicem diſcreparent. Forſitan igitur *dies* A*egyptiaci*, in laterculis Salmaſianis deſcripti, nomen hoc pleno jure non mereri multis videbuntur. Ne igitur ſententiae meae ex hac obſervatione detrimentum aliquod oriatur, dabo *diem* A*egyptiacum*, infauſtum, judicio totius gentis publico, pro tali habitum, & qui tamen inter *dies* A*egyptiacos* Kalendarii noſtri nullus comparet. Is eſt D. XXVI. A*uguſti* menſis, de quo PLUTARCHUS haec in literas retulit. (y) *Itaque tertium Epactarum diem reges pro* NEFASTO *habebant*, (ἀποφράδα νομίζοντες) *ideoque non dabant reſponſa, neque ante noctem corpora curabant.* Dies tertia epactarum eſt, uti monui, D. XXVI. A*uguſti*, illam in Aegypto judicatam fuiſſe *ἀποφράδα nefaſtam* teſtatur PLUTARCHUS, qua ipſa voce uſus etiam eſt MARINUS (z) ſupra jam citatus, ubi ſcribit de Proclo. A*egyptiorum nefaſtos dies*, (τὰς παρ᾽ αἰγυπτίοις ἀποφράδας) *diligentius obſervabat, quam illi.* Et tamen *tertiæ Epactarum*, ſive D. XXVI. A*uguſti*, inter dies K*alendarii Romani*, non magis locus eſt, quam in Salmaſii laterculis. Aliud ergo profecto ſibi volunt *dies* infauſti A*egyptiaci*, Aſtrologorum, aliud *dies Aegyptiaci* Kalendarii noſtri, quorum genuinam indolem nunc age curatius inveſtigemus.

§. VII.

Sunt autem *dies* A*egyptiaci* in K*alendario Romano* commeme-

(y) De Iſide & Oſir. p. 634. Ed. Steph. vel 356. init. Edit. graeco lat. Paris. 1624.

(z) §. II.

memorati, uti ego quidem cenſeo, dies feſti, quos religio Aegyptiorum genti huic præcipiebat, quosque Romae ſolenniter obſervare, Senatus indultu permiſſum erat. Variam quidem Sacra Aegyptiorum fortunam Romae experta ſunt, ſaepe contemta ac ludibrio habita, ſaepius urbe expulſa; ſed tandem tamen caput ita extulere, ut pari, cum avitis Romanorum Sacris, religione & celebritate à multis publice colerentur, & nonniſi una cum Romanorum ſuperſtitione propria ac domeſtica, tandem aboleri potuerint. Pluribus argumento huic, quod (a) alii docte & diligenter perſecuti ſunt, nunc non inhærendum eſſe puto. Seculo igitur à nato Chriſto redemtore, tertio & quarto Sacra Aegyptiorum poſt multiplicem luctam emerſere, jusque civitatis Romanae impetravere, ut in eadem pene cum avitis Romanorum Sacris veneratione eſſent. Quia vero Sacrorum ceremoniae antiqua Aegyptiorum religione ſancitae, à ritibus Romanorum Sacris, immane quantum differebant, quia alia Feſtivitatum Sacrarum tempora propria erant Aegyptiorum genti, alia Romanis, nihil profecto erat convenientius, quam ut in *Kalendario Romano* dies religioni Aegyptiorum conſecrati, à Solennitatibus Romanorum hoc diſtinguerentur & ſignarentur discrimine: *Dies Aegyptiaci.*

§. VIII.

Vera me dicere facile largietur, quisquis *Kalendarii* hujus

(a) PIGNORIUS in Expoſitione Tabulae Iſiacae cap. II. CHIFLETIUS ad gemmas Abraxeas p. 136. CUPERUS in Harpocrate p. 149. 150.

jus *Romani* ingenium & indolem paulo accuratius inveſtigare operae pretium duxerit. Nihil enim, quod jam ſemel monui, continet aliud, quam celebritates publicas, ſacras, civiles, legibus Romanorum aut ſancitas, aut certe permiſſas. Videas igitur, inter Solennitates Romanorum religioſas atque publicas, in *Kalendario* noſtro annotatas, non patrias tantum & avitas occurrere, verum etiam peregrinas, ex Senatus conſulto tamen civitate Romana donatas. Hujus generis ſunt *Cybeles,* ſive, ut Romani loquebantur, *magnæ Deum matris* feſtivitates Sacræ, e Phrygia Romam advectae, ibique magna religione conſecratae. Hinc namque eſt, quod ad D. IX. *Kal. Aprilis* (XXIV. *Martii*) legamus annotatum *Sanguen*, & ad D. IIX. *Kal. Aprilis* (XXV. *Martii*) *Hilaria.* Ad prioris diei Solennitatem reſpexit TERTULLIANUS, cum iſta Romanis objiceret. (b) *Viderit Cybele, ſi urbem Romanam, ut memoriam Trojani generis adamavit, vernaculi ſui ſcilicet, adverſus Achivorum arma protecti, ſi ad ultores tranſire praſpexit, quos ſciebat Graeciam, Phrygiae debellatricem ſubacturos. Itaque Majeſtatis ſuae in urbem collatae, grande documentum noſtra etiam ætate propoſuit, cum M. Aurelio apud Syrmium reipublicae exemto, die ſexto decimo calendarum Aprilium* (XVI. Martii) *Archigallus ille Sanctiſſimus, die nono calendarum earundem* (XXIV. Mart.) *quo SANGUINEM impurum, lacertos quoque caſtrando libabat, pro Salute Marci jam intercepti.* De eodem die *TREBELLIUS POLLIO* haec habet. (c) *Nam cum eſſet nuntiatum, nono Calend.*

Hhh *Aprilis*

(b) in Apologetico cap. 25.
(c) In vita Claudii cap. 4. inter Scriptores hiſtoriae Auguſtae Tom. II. p. 359.

Aprilis (XXIV. Martii) *ipſo in Sacrario Matris*, *SANGUINIS DIE*, *Claudium Imperatorem factum.* Cauſa autem, quod dies iſte diceretur *Sanguinis dies*, haec fuit, quod eo Sacerdotes Deae Phrygiae, diſſectis & dilaniatis brachiis, ac effuſo ſanguine, luctum ſuum immodicum teſtarentur. Nempe, ut (d) vetus quidam Grammaticus nos docet, *Phryges vere* ineunte, *plangebant Attin* ſuum vel Adonin. Itaque D. IX. K*al. Aprilis* (XXIV. *Martii*) qui Romanis erat ultimus dies hyemis, Romae plangebatur Attis ſive Adonis. Is *dies* erat *ſanguinis.* Die vero inſequenti XXV. Martii, (e) quo Romani celebrabant *Aequinoctium vernum*, celebrabantur etiam *hilaria* illa, quae in K*alendario* noſtro annotantur. Id ex Phrygum Theologia, hunc in modum nobis explicabit MACROBIUS. (f) *Praecipuam autem Solis in his ceremoniis verti rationem, hinc etiam poteſt colligi, quod ritu eorum catabaſi* (Solis deſcenſu) *finita*, (D. XXIV. *Martii*) *ſimulationeque luctus peracta, celebratur lætitiæ exordium, a. d. octavum Calendas Aprilis* (XXIV. Aprilis) *quem diem HILARIA appellant, quo primum tempore Sol diem longiorem nocte protendit.* In eodem noſtro K*alendario*, legimus in *Aprile* Menſe. *Pridie nonarum Aprilis* (IV. Aprilis) *Ludi Megaleſiaci*, quam novimus pariter Feſtivitatem eſſe religioſam, e Phrygia Romam delatam. Res eſt nota

(d) SCHOLIASTES *Nicandri* graecus in Alexipharmaca p. 64. Edit. Colonienſis.

(e) COLUMELLA de R. R. Lib. IX. cap. 14. SERVIUS in Virgilii Lib. I. Georg. vs. 100.

(f) Saturnal. Lib. I. cap. XXI.

nota valde, eamque hisce tantum CICERONIS verbis illuſtrabo. (g) *Nam quid ego de illis ludis loquar, quos in Palatio noſtri Majores ante templum, in ipſo Matris magnæ conſpectu, Megalenſibus fieri, celebrarique voluerunt — quorum religio tanta eſt, ut ex ultimis terris arceſſita, in hac urbe conſederit.* Quid plura? Annon ex his perſpicuum eſt, *dies Phrygiacos*, non minus atque Aegyptiacos in *Kalendario Romano* annotari?

§. IX.

Praeter ſuperſtitiones has, ex ultima Phrygia, quemadmodum CICERO loquitur, Romam advectas, notantur etiam in *Kalendario* noſtro dies, quos antiqua Perſarum religio genti ſuae ſacros eſſe voluit, quia labente tempore, Roma ipſa eosdem concelebrare dedignata non eſt. Eo pertinere arbitror, quod ad Menſem *Majum* obſervatum deprehendimus. III. *Idus Maji* (XIII. Maji) *Ludi perſici*, & mox XVI. *Kal. Junii* (XVIII. Maji) *Perſici.* Nempe *Ludi* illi *Perſici* initium ſumebant D. XIII. *Maji*, & abſoluti erant D. XVIII. ejusdem Menſis. *Ludos* vero illos, quorum in *Kalendario* noſtro perſaepe mentionem fieri videmus, plerumque religionis cauſa, & in Deorum honorem factos fuiſſe, & res ipſa docet, & ex iis quae §. VIII. de *Ludis Megaleſiacis*, ex CICERONE monuimus, ſatis liquere poteſt. Erant igitur (h) *ludi perſici*,

 Mi-

(g) In Oratione de haruspicum reſponſis cap. 12.

(h) Tanto melius Sacra haec potuerunt dici *ludi*, quod re ipſa, eſſent *ridendum ſpectaculum, & hiſtrionica repraeſentatio*, unde factum eſt, ut Sacerdotes Mithrae appellentur *ludii* & *mimi*. Vide PHIL. à TURRE Monumenta Veteris Antii p. 206. 207.

Mithrae, ita Perſae vocabant *Solem*, ab iis inſtituti, qui placita Zoroaſtris, & ceremonias Magorum approbabant. Eorum autem numerum Romae non adeo exiguum fuiſſe, quam credi forte poſſet, vel ex iis colligere licet, quae Commodum ipſum, Romanorum Imperatorem, feciſſe ſcimus. Ille enim (i) *Sacra Mithriaca homicidio vero polluit, quum illic aliquid ad ſpeciem timoris vel dici vel fingi ſoleat.* Imperatore Conſtantio, eoque adeo tempore, quo *Kalendarium* noſtrum compoſitum eſt, *Sacra* illa *Mithriaca* Romae etiam num publice & ſolenniter, nemine prohibente, peragi conſueviſſe, (k) PHILIPPUS à TURRE vir & dignitate & eruditione illuſtris, qui de Sacris illis copioſiſſime diſſeruit, ex lapidibus docte probavit. Viginti circiter annis poſt, haec demum ſcripſiſſe HIERONYMUM ad *Laetam* legimus. (l) *Ante paucos annos, propinquus veſter Gracchus, nobilitatem patritiam nomine Sonans, quum præfecturam gereret urbanam, nonne ſpecum Mithræ, & omnia portentuoſa ſimulachra — ſubvertit, fregit, excuſſit.* Hanc vero Gracchi præfecturam urbanam, in A. C. 378. conjiciendam eſſe, erudite demonſtratum dedit, (m) doctiſſimus vir, cujus modo mentionem feci. Is igitur demum annus, *ludis perſicis* & Sacris Mithriacis in Italia finem attulit, quorum ceteroquin & Romae, & in urbibus vicinis, etiam hodie, non obſcura reperiuntur veſtigia ac monumenta.

§. X.

(i) LAMPRIDIUS in Commodo cap. 9. in Scriptoribus hiſt. Aug. Tom. I. p. 498.

(k) de Mithra cap. ultimo, in Monumentis veteris Antii p. 244.

(l) Epiſt. LVII. Operum Edit. Benedict. Tom. IV. Col. 591.

(m) PHIL. à TURRE libro cit. p. 247.

§. XI.

Vidimus igitur in *Kalendario* noſtro, *dies* etiam *Perſicos*, quomodo nuncupari utique recte potuiſſent, unde conjecturam facere licet, quid de *Aegyptiacis* pronuntiandum ſit. Et ne conjecturis nudis, rem hanc conficere velle videamur, age paulo propius nunc *dies* Kalendarii noſtri *Aegyptiacos* examinemus, videamus, num non feſtivitatibus Aegyptiorum Sacris dicatos fuiſſe, aliunde probare poſſimus. In *Januario* Menſe, primus ex *diebus Aegyptiacis* incidit in IV. *Non. Januarii*, id eſt. II. *Januarii*, qui Aegyptiis eſt VII. *Tybi*. Et eo quidem die Aegyptios Sacra ſolenniter feciſſe Iſidi, hocce PLUTARCHI teſtimonio docere poſſum. (n) *Itaque Aegyptii ſeptima Menſis Tybi ſacrificantes, quam diem nominant Iſidis ex Phœnice adventum, in placentis imaginem fingunt equi fluviatilis vincti*. Sequitur in eodem *Kalendario*, ad D. VIII. *Idus Januarii*, id eſt VI. *Januarii*, vel XI. *Tybi*, *dies Aegyptiacus*. Et hunc quoque ſancte & religioſe ab Aegyptiis omnibus tranſigi conſueviſſe, alio PLUTARCHI teſtimonio probare poſſem, niſi ſcriptor ille eruditus, eo loco, quo de feſtivitate hujus diei diſſerit, aliud agendo, levem errorem admiſiſſet, quem (o) alibi detexi. Mihi ceteroquin dubium nullum eſt, quin dies iſte, Aegyptiis omnibus longe fuerit ſanctiſſimus. In Menſe *Februario*, ad D. V. *Kal. Martii*, ſeu XXV. *Februarii*, ſecundum Aegyptios D. I. *Phamenoth*, ſimiliter notatum

(n) PLUTARCHUS de Iſide & Oſir. p. 662. Edic. Stephani, vel 371. Paris.

(o) in Conjectaneis ad Clauſulam Tabulae Bembinae §. XIV.

legimus: *Dies Aegyptiacus.* Diem vero illum Aegyptiis ſacrum & ſolennem fuiſſe, teſtem habeo rurſus PLUTARCHUM, in haec verba ſcribentem. (p) Τῇ νεμενίᾳ τοῦ Φαμενὼθ, *prima die menſis Phamenoth Feſtum celebrant, quod ingreſſum Oſiridis in Lunam appellant, eſtque id veris initium.* In Menſe denique *Octobri*, ad D. V. *Non. Octobris* D. III. *Octobris*, vel ſecundum Aegyptios, VI. *Phaophi*, recurrunt verba illa conſueta: *Dies Aegyptiacus.* Hunc ipſum vero diem, Religione Aegyptiorum conſecratum pariter fuiſſe, auctoritate PLUTARCHI comprobare poſſum, cujus iſta verba adſcribo. (q) *Dicunt Iſin, cum ſe ſentiret eſſe gravidam, appendiſſe ſibi amuletum, ſexta die menſis Phaophi, & peperiſſe Harpocratem ſub Solſtitium hybernum.* Annon igitur dies etiam iſte in Aegyptiorum Feſtis ſacer ac venerabilis habebatur?

§. XI.

Non diſſimulabo, PLUTARCHUM in eodem libro, ex quo iſta nunc excerpſi, alios quosdam feſtos Aegyptiorum commemorare dies, qui in *Kalendario Romano*, nomine *dierum Aegyptiacorum* notati non deprehenduntur. Verum id cauſae meae obeſſe nulla plane ratione poteſt. Etenim Feſta à legis latoribus Aegyptiorum conſecrata, in ipſa Aegypto, neque ab omnibus, neque eodem tempore concelebrari ſolebant. Quaedam toti Aegyptiorum genti erant communia, alia

(p) de Iſide & Oſir. p. 368. Ed. Paris.

(q) Idem ibid. p. 377.

alia nonniſi in urbibus quibusdam, aut Praefecturis celebrare moris erat. Solemnitatibus etiam iisdem, communi laetitia conſecratis; alius nonnunquam in Thebaide, alius in Aegypto inferiori dies dicatus erat atque ſacratus. Plutarchum de Feſtis Praefecturarum totius Aegypti omnibus ſine discrimine loqui, res ipſa docet, ſecus atque in *Kalendario* noſtro factum eſt. Nam qui ex Aegypto Romam tranſibant, & in urbe illa domicilium figebant, erant ut plurimum Alexandrini, aut ex Aegypto inferiori, qua mari vicina eſt, oriundi, ex quo conjicere proclive eſt, notationem *dierum* feſtorum *Aegyptiacorum*, in noſtro *Kalendario* attemperatam eſſe Faſtis Aegyptiorum Alexandrinorum. Facile vero præterea & id evenire potuit, ut in nonnullis diebus Aegyptiorum feſtis, Romæ celebratis, mos obſervaretur prorſus peculiaris & ſingularis, cujus etiam in *Kalendario* hocce veſtigia mihi deprendiſſe videor.

§. XII.

Praeter *dies* illos *Aegyptiacos*, in *Kalendario Romano* annotatos, quos Sacris Aegyptiorum ſolennibus dicatos fuiſſe, ex PLUTARCHO demonſtravimus, occurrunt in eodem *Kalendario* alii, de quibus idem plane dicendum eſſe, ex aliis Vetuſtæ hiſtoriae monumentis conſtat. Operae pretium me facturum puto, ſi de eorum nonnullis id paulo uberius oſtendero. *Februario* itaque, ad D. VII. *Id. Februarii*, vel ſecundum Aegyptios XIII. *Mechir*, legimus notatum: *Dies Aegyptiacus.* Cujus rei forte rationem, auctor Geoponicôn, no-

bis

bis in his ſuppeditabit. (r) *Pleriquae ſane, & ante ceteros* (s) *Varro Romanus, id dicunt eſſe Veris initium, quando Zephyrus ſpirare utplurimum incipit, id eſt D. VII. Id. Februarii.* Tempus hocce, ut laetiſſimum, HORATIUS deſignat, ita canens:

(t) *Solvitur acris hiems, grata vice veris & Favoni.*

Et ne forſitan exiſtimes, hoc Romanis fuiſſe peculiare, teſtem dabo PTOLEMAEUM, qui id ipſum Aegyptiis quoque, Alexandrinis nempe, tribuit, verum loco XIII. *Mechir*, ipſe D. XIV. ejusdem menſis annotavit. (u) XIV. *Mechir*, inquit, *Aegyptiis & Eudoxo initium veris.* Diſcrepantia illa unius diei, quae in Ptolemaeo, uti dixi, obſervatur, nullius profecto ponderis eſt. Nam in ipſa Aegypto, ſolennes ſacrorum celebrationes, in urbibus diverſis, ſaepe uno alterove die diſtuliſſe, multis modis teſtatum eſt. Forſitan etiam Aegyptii Romae habitantes, cum diſcrepantia adeo levis eſſet, idem cum Romanis veris initium celebrare maluerunt. Nolim omittere, diem illum, de quo nobis ſermo nunc eſt, in *Kalendario Romano* annotatum, hodieque obſervari in Faſtis Aegyptiorum, ſi VANSLEBIO ſcriptori non indiligenti credimus, iſta referenti: (w) *Hyems Aegyptiorum medio Decembri*

(r) Lib. I. p. 4. Edit. Baſil. græc.

(s) de Re Ruſtica Lib. I. cap. 28.

(t) Carminum Lib. I. Od. IV. niſi tamen Poëta noſter ad Aprilem potius reſpexerit, quod viro Doctiſſimo JANO RUTGERSIO placet, Lection. Venuſin. cap. II.

(u) de apparentiis inerrantium, in PETAVII Uranologio, p. 81.

(w) in itinerario gallice edito Paris 1698. pag. 35.

cembri incipit. Haecce anni tempeſtas clemens & jucunda eſt, dummodo ſeptem dies excipias, ab Aegyptiis nuncupatos Berd il agiuz, *quaſi dicas* frigus vetulae. *Initium ſumunt* (x) *D. VII. Februarii, durantque ſeptem continuos dies, quibus per horas matutinas frigus ſentitur paulo rigidius. Eodem tempore aër nubibus plerumque obvelatus eſt, pluvia obſervatur frequentior, ventorumque impetus vehementior.* Qualia etiam apud (y) ſcriptorem recentiorem alium, ſed ex Vanslebio, ut credo, repetita leguntur.

§. XIII.

Sed pergamus ad *Martium* Menſem, in quo ad D. IX. Kal. *Aprilis* (XXIV. Martii) vel ſecundum Aegyptios XXVIII. *Phamenoth* legimus: *Dies Aegyptiacus.* Illo die, qui *dies ſanguinis* ideo nuncupabatur, cultores Matris Deum Phrygiae, Attinem ſuum plangebant, ut poſtridie ejusdem diei, de eo invento, aut redivivo gauderent, ac *hilaria* celebrarent. Equidem ignoro, an non hoc ipſum Aegyptiis Romae viventibus, argumentum aliquod ſuppeditaverit, ut diem hunc eundem conſecrarent. Magnam enim inter Phrygum Aegyptiorumque Theologiam conſenſionem fuiſſe, non uno indicio oſtendi poteſt. Quicquid autem illius ſit, ego potius ſuſpicor, Aegyptios Romanos die XXIV. *Martii* vel XXVIII. *Phamenoth*, memoriam aequinoctii verni recoluiſſe. Alexandri-

(x) HERBELOTUS in Bibliotheca Orientali, articulo AGIUZ, ait, dies illos ſeptem, eſſe ſolſtitii hyberni.

(y) PAUL LUCAS in itinerario de A. 1714. Tom. II. p. 239.

drini ſolennitatem eandem peragebant D. xxvi. *Phamenoth*, ſive xxii. *Martii*, quod (z) permulti teſtantur. Romani vero, quod proprii gentis hujus togatae (a) Scriptores nos docent, Sacro huic deſtinaverant D. viii. *Kal. Aprilis*, id eſt xxv. *Martii*, vel ſecundum Aegyptios xxix. *Phamenoth*. Inter duos hosce dies intermedius eſt ille, quem in *Kalendario* noſtro notatum deprehendimus, xxiv. *Martii*, vel xxviii. *Phamenoth*, quem ad eandem Solennitatem ſpectaſſe, mihi plus quam vero ſimile ſit. Et certe à quibusdam in ipſum hunc diem rejectum fuiſſe aequinoctium vernum, ſcimus ex diſerto teſtimonio (b) auctoris *Geoponicôn*. Eorumque calculos ſecuti fuiſſe videntur, qui *dierum Aegyptiacorum* Romae celebratorum rationem diſpoſuerunt.

§. XIV.

Ubi ad Menſem *Aprilem* perventum eſt, duos annotatos videmus *dies Aegyptiacos*, qui ſe, unico tantum die interpoſito, illico conſequuntur. Nam ad D. XIII. *Kal. Maji*, id eſt XIX. *Aprilis*, vel ſecundum Aegyptios, XXIV. *Pharmuthi*, legimus: *Dies Aegyptiacus*, & idem mox repetitur ad D. xi. *Kal. Maji*, vel xxi. Aprilis, aut ſecundum Aegyptios xxvi. *Phar-*

(z) PTOLOMAEUS in Uranolog. PETAVII p. 83. ANATOLIUS apud EUSEBIUM Hiſt. Eccleſ. Lib. VII. c. 32. EPIPHANIUS Haereſi LI. §. 26. 27.

(a) Vetus *Kalendarium Ruſticum* in *Martio*, itemque aliud *Kalendarium* Faſtis Ovidii in Codd. MSS. præmiſſum. COLUMELLA Lib. IX. c. 14. SERVIUS in Lib. I. Georgic. 100.

(b) Lib. I. pag. 5. Edit. Baſil. graec.

Pharmuthi. Ita ſcriptum reperio in Editione Kalendarii noſtri HERWARTIANA, qualem recudi fecit SCURTZFLEISCHIUS p. 270. In Codice alio, ex quo novam ejusdem editionem procuravit BUCHERIUS, *Aprilis* menſis cum aliis nonnullis plane deeſt. In editione porro LAMBECII, ea ſaltem, quam SCHURTZFLEISCHIUS repetitam nobis dedit, ad unum tantum, non duos dies, id annotatum legimus, Diem nempe XXI. Aprilis, XXVI. *Pharmuthi* Aegyptiorum. Qua in re ego lectionem Codicis Herwartiani reliquis omnino anteferendam putem. Romae igitur, menſe *Aprili*, duo celebrabantur *dies Aegyptiaci*, brevi unius tantum diei intervallo interjecto, Dies XIX. & XXI. Quodſi jam Faſtos Aegyptiorum conſulamus, illi, ut opinor, rationem rei hujus optimam & certiſſimam nobis ſubminiſtrabunt. Eam ita explicat THEO, celebris ARATI interpres: (c) *Aratus ortum vergiliarum in vere locat. Matutino enim exoriuntur cum Sole, quando is in Tauro exiſtit, poſt D.* XXV. *Pharmuthi.* (D. XX. Aprilis) *menſis ille cum Romanorum Aprili congruit, idque ipſum tempus meſſis eſt apud Aegyptios.* Liquido ex his perſpicitur, diem inter duos *Aegyptiacos dies*, notatos in Kalendario Romano, intermedium fuiſſe in Aegypto meſſis initium, quod etiam recentioribus (d) virorum doctorum obſervationibus confirmatur. Ideoque dies ille impenſa Aegyptiorum religione

(c) Scholiis graecis in ARATI Phaenomena p. 31. Edit. Morelli, 36. b. Edit. Oxon.

(d) Vide viri venerandi J. A. DES VIGNOLES Chronologiam Sacram Tom. I. p. 555. Adde MAILLETI deſcriptionem Aegypti Tom. II. p. 95. 96. Editionis ſecundae.

gione omni procul dubio colebatur. Ipſum hoc videtur eſſe Sacrum, cujus DIODORUS SICULUS mentionem facit, ubi ſcribit: (e) *Etiam nunc meſſis tempore, oblatis ſpicarum primitiis, incolae juxta manipulos plangere, Iſidemque invocare ſolent. Id quod idcirco faciunt, ut honorem pro inventis Deae, ſub primae inventionis tempus retribuant.* Huic Feſto Aegyptii, qui Romae degebant, tres integros dies ſacros eſſe voluerunt, D. XIX. XX. & XXI. *Aprilis*, quorum in *Kalendario* noſtro, more ſolenni, primus tantum & ultimus dies nominantur. Hac ratione factum eſt, ut & diem in Aegypto ſolennitati huic dicatum, D. XX. *Aprilis* complecterentur, & eadem opera ſuperſtitioni Romanorum velificarentur, ut qui D. XIX. *Aprilis*, ludos ſuos *cereales* ſolenniter clauderent, Die vero XXI. *Aprilis*, natalem urbis ſuae religioſe concelebrarent, quod etiam in *Kalendario* noſtro obſervatum videmus.

§. XV.

Praetermiſſo menſe *Majo*, in quo non deprehendo, quod operam meam poſcat, transeamus jam ad *Junium*, in quo, uti in reliquis etiam fere conſuevit fieri, duos *dies Aegyptiacos* videmus annotatos. Nam primo quidem ad VII. *Id. Junii* (VII. *Junii*) vel ſecundum Aegyptios XIII. *Payni*, legitur appoſitum: *Dies Aegyptiacus.* Non memini quidem, me apud Scriptores veteres, Graecos Romanosque, de hoc nominatim die quicquam legiſſe memoriae proditum. Verum non

(e) Lib. I. p. 13. Edit. Wechel.

non dubito tamen, quin ſacer habitus, & cultui Aegyptiorum religioſo deſtinatus fuerit. Lucem aliquam hic nobis praeberent Scriptores Arabes, quantumvis rei geſtae veritatem fabulis ineptis incruſtare, ac propemodum totam involvere ſoleant. Audiamus igitur (f) MURTADIUM Arabem Scriptorem, uti ſuſpicabatur (g) ejus editor, Seculi XIII. in haec verba ſcribentem. (h) *Ferunt, ad Amrum filium Alaſi, cum in ditionem recepta Aegypto,* (i) *Miſram intraſſet menſe Payni, acceſſiſſe regionis illius incolas, eique expoſuiſſe, Nilum fluvium, ex praeſcripto certae cujusdam legis, tempore praeſtituto, in arva ſua effundi, eaque irrigare, & legem illam nunquam violari. Cumque Amrus quaeſiviſſet, ecquaenam lex ea eſſet, hoc reſponſum tuliſſe: DUODECIMA menſis hujus PAYNI, virginem pudicitiae intactae ex manibus parentum, quibus, ut in negotium hoc conſentiant, ſatisfieri primum debent, accipimus, eamque deinde veſte ſplendida, & pretioſis monilibus exornatam, noctu deducimus ad Nilum ac ultimo in fluvium huncce pracipitem damus. Hoc facto fluvius adſcendit, & agros noſtros implet.* Rem eandem ex aliis gentis Arabicae Scriptoribus, & ex traditione in Aegypto

(f) De admirandis Aegypti, ex verſione Gallica & editione P. VATTIERII p. 164. 165.

(g) VATTIERIUS in Praefat. p. 40.

(h) Neglecta hic orthographia interpretis Gallici, eam quae hodie recepta magis eſt, ſecutus ſum.

(i) Urbem quae poſtea *Kabira*, vulgo *Cairo* vocata eſt.

gypto pervulgata repetunt (k) permulti, qui iter in illas terras ſusceperunt. Quis jam eſt, qui non illico ſentiat, fabulam ſic nobis narrari, cui nulla, ne vel minima quidem, ſpecies veri ineſt, & de qua ante recentiores hos Arabes Muhammedanos, egregios fabularum fautores, nemo unquam fando aliquid audivit.

§. XVI.

Verum ubi tamen rumor etiam falſus non temere naſcitur, & ſub fabularum tegumentis aliquid veritatis ſubeſſe ſolet, ita mendax quoque iſta Arabum traditio, viam forte nobis oſtendet,* ad inveniendam veram cauſam, ob quam in *Kalendario Romano* Dies XIII. *Payni*, nuncupetur *dies Aegyptiacus.* An non enim id ſaltem hinc intelligitur, eo tempore, quo Arabes Aegyptum ſubjugarunt, regionis illius incolas Diem XII. *Payni* ſolenniter, ut feſtum, cum gaudio celebraſſe? De quo tanto minus dubitari poteſt, quia res ipſa in hodiernum usque diem perſeverat, ejusque memoria quotannis recolitur. Nempe perſuaſum eſt Aegyptiis, (l) à D. XII. *Payni* incrementa Nili adſcendentis, à quo omnem regionis ſuae fertilitatem expectant, conſpicua fieri, & ab illo tempore ſenſim progredi, ex quo etiam fit, (m) ut poſt D. XII.

(k) VANSLEB relation d'un voyage d'Egypte p. 52. LUCAS relation du voyage fait en 1714. Tom. I. p. 316. les *Nouveaux Memoires des Miſſions* Tom. VII. p. 154. MAILLET Deſcription d'Egypte Tom. I. p. 86.

(l) *Vansleb* lib. cit. p. 48.

(m) idem auctor. p. 57.

D. XII. *Payni*, Liturgiis ſuis hanc orationem interferant. (n) *Dignare* o Domine *fluvios plenitudine aquarum: benedic illis, fac ut adſcendant ſecundum menſuram ſuam.* Alia etiam diei huic volunt propria, ex quibus ingentia in totam Aegyptum redundent bona. Explicemus id verbis ſcriptoris admodum recentis, ſed laudati. Is autem ita. (o) *Vixdum aquilo ſpirare incepit, cum ecce morbi illi omnes evaneſcunt. Ventus hicce, humiditate plurima, quam, dum in Aegyptum ruit, attraxit, turgidus, ſemper ſentitur* D. XII. *Payni ſecundum Coptos. Quia igitur humiditate ſua, inſignem aëri mutationem infert, id ipſum occaſionem dedit traditioni cuipiam, cujus nulla apud veteres veſtigia reperiuntur; ſed quae tamen habetur pro certiſſima & teſtatiſſima. Dicunt autem die illo coelitus decidere rorem, quem ipſi guttam vocant, cujus virtute aër perpurgetur, & corruptio omnis diſpellatur.* Guttae hujus meminerunt omnes, qui de admirandis Aegypti ea literis prodidere, quae in Aegypto ipſi aut viderunt aut audiverunt, qui tamen & id addere ſolent, (p) guttam hanc, poſtquam Nilo, fermenti inſtar admixta fuit, incrementi ejus cauſam eſſe. Sed pace viri ingenioſi affirmare mihi liceat, traditionis hujus, non ita recentis,

(n) Liturgia GREGORII, in Collectione RENAUDOTII Tom. I. p. 33. Ego vertionem meam adornavi ad normam Codicis MS. quem olim in Bibliotheca Lugduenſi-Batava evolvi.

(o) *MAILLET* Deſcription d'Egypte Tom. I. p. 71.

(p) *VANCLES* p. 48. le Pere *SICARD* dans les nouveaux Memoires des Miscons Tom. VII. p. 119. &c.

centis, atque ipſe ſibi perſuadet, veſtigia ſatis luculenta apud veteres reperiri. Nam quod nunc *guttam roris coeleſtis* Aegyptii hodierni vocare ſolent, id majores eorum vetuſtioribus temporibus *guttas lachrymarum Iſidis* dixerunt, & his quidem eandem plane virtutem tribuerunt. *Multi ex indigenis*, (q) PAUSANIAS, de Aegyptiis loquens, *ajunt*, LACHRYMAS ISIDIS *efficere, ut Nilus augeatur, & in arva ſe effundat.* Paulo aliter LUTATIUS, non ineruditus STATII interpres, qui incrementa Nili lachrymarum guttis etiam, ſed lachrymis Aegyptiorum in acceptis fert. Verba ejus ſunt. (r) *De Sacris Iſidis tractum: quia proventum fructuum Aegyptii quaerunt usque ad veros planctus. Nam irrigatio Nili ſupradictorum FLETIBUS imploratur.* En fletus, ſive lachrymas, quibus irrigatio Nili deberi credita eſt, usque adeo traditio illa Aegyptiorum veteribus cognita & pervulgata fuit. Ex his igitur, ut nunc ad rem, unde digreſſus eram, redeam, ſatis liquere arbitror, D. XII. PAYNI, Aegyptiis ab omni hominum memoria, Sacrum fuiſſe & venerabilem, ut qui fertilitatis, quam à Nilo anxie expectabant, prima ſpecimina dare ſoleret, ipſosque optima quaeque ſperare juberet. Ne quem vero turbet, quod in *Kalendario* noſtro, non D. XII. ſed XIII. *Payni* notatum videamus. Nam discrepantiae hujus

(q) in Phoicis p. 350. Edit. Wechel. græc.

(r) in *STATII* Thebaid. Lib. I. vs. 265.

jus generis leviores, in Faſtis Aegyptiorum obſervantur plures, earumque rationes (s) alio jam loco indicavi.

§. XVII.

Quia in hoc argumento jam verſor, lectorem aequo animo laturum eſſe confido, ſi quidnam de origine vera fabulae illius Arabicae, quam §. XV. retuli, cenſeam, diſtinctius nonnihil explicuero. Tradunt autem Arabes, inter ſolennitates, apud vetuſtos Aegytios diei XII. *Payni* conſecratas, fuiſſe & hanc, quod Nilo virginem immolaverint, eamque vivam in fluvium praecipitaverint. Arabem profecto eſſe oportet, qui iſtud credat. Verum quis dubitet, quin à vetuſtis Aegypti incolis, inter alia laetitiae publicae illius diei argumenta„ inter grates coeleſtibus perſolutas, Nilo etiam ſacrificia oblata fuerint? Cumque Aegyptii, etiam in Sacris Deorum, à ſanguine pecudum, abſtinere ut plurimum ſolerent, vero diſſimile non eſt, loco pecudum Nilo & ceteris Diis, in Solennitate illa, ferta, liba, ac placentas oblatas fuiſſe. Id ſi recte conjicio, PLUTARCHUS docere nos in his voluit. (t) *In ſacrificiis, quae menſibus Payni & Phaophi peragunt, placentas coquunt, quae pro inſigni aſinum vinctum impreſſum habent.* Nempe ſacrificia haec offerebantur eo tempore, quo Nilus adſcendere incipiebat, menſe *Payni*, & quo creſcere deſinebat, Menſe *Phaophi*, non ſecus atque ho-

(s) Supra §. XI. & & XIII.

(t) de Iſid. & Oſir. p. 646. Edit. Steph. vel 362.

die regionis illius incolae, (u) *in officio Divino matutino, à Die* XII. Payni, *ſive Junii, usque ad* D. VIII. Phaophi, *vel Octobris, orationem peculiarem recitant; qua Deum precantur, ut incrementis Nili benedicat, & fluvium ad juſtam ſuam menſuram adſcendere jubeat.* Poſſum adferre aliud, in quo vetuſti illius Aegyptiorum moris veſtigia ſervantur adhuc luculentiora. (w) *Nam die illo, quo gutta cadit*, i. e. D. XII. Payni, *mulieres in Aegypto non minus, quam in aliis regionibus, ſuperſtitioſae, inter cetera, hoc etiam inepte ſatis ſibi perſuadent, guttam illam, dum illabitur in terram, maſſam etiam quandam farinae aqua ſubactae, quam nocte præcedente aëri expoſuerunt, fermentare. Ex maſſa illa* PLACENTAS *poſtea coquunt, quas partim aliis dono mittunt, partim vero ſibi ipſis ſervant, & in domibus ſollicite cuſtodiunt, ea opinione ineſcatae, mederi eas adverſus morbos.* Quis hic non videat reliquias ſuperſtitionis illius, quam vetuſtioribus ſuis Aegyptiis, PLUTARCHUS tribuit. Placentae illae vetuſtiorum Aegyptiorum, figuram, uti jam ex PLUTARCHO intelleximus, impreſſam habebant aſini, id eſt Typhonis, genii mali, vinculis conſtricti, & ex his placentis aliquas, de quo dubitandum non videtur, in Nilum projiciebant. Rem ipſam, ut plurima alia, poſt id temporis retinuerunt Chriſtiani, eo tantum discrimine ſervato, ut ritus antiquos, in ſolennitate Niliaca adhibitos, ad placita religionis

---

(u) *VANSLEB* relation d'un voyage fait en Eglyſe p. 57.

(w) *MAILLET* Deſcription d'Egypte Tom. I. p. 71.

nis ſuae magis attemperarent. Itaque ſuſpicor, eos loco aſini vincti, qui in vetuſtiorum Aegyptiorum placentis viſendus erat, placentulis ſuis imaginem B. Virginis Mariae impresſiſſe, earumque unam, aut etiam alteram in Nilum conjeciſſe. Aegyptii antiquiores, Nilum ſuum in tutela Iſidis eſſe, & lachrymis ejus augeri credebant. Quid vetat nos augurari, Chriſtianos, Seculo forte quinto adulto, aut ſexto, Iſidi beatam Virginem ſubſtituiſſe, ejusque imaginem Nilo obtuliſſe? Hodie certe, Aegyptios, quando Nilus adſcendere deſiit, D. VIII. *Phaophi*, poſt alios ritus, ſolennitati huic dicatos, ad ultimum crucem in medium Nilum mittere, (x) ſcriptores fide digni teſtantur. Quidni olim Majores eorum idem cum imagine B. Virginis feciſſent? Hinc ſine dubio rumor ille natus, Aegyptios virginem quotannis in Nilum ſolitos fuiſſe praecipitare. Sed ego haec dijudicanda aliis libenter relinquo.

§. XVIII.

Satis de D. VII. *Junii*, vel XIII. *Payni*, quem inter *dies Aegyptiacos*, Kalendarium noſtrum collocat. Eſt & alter in eodem menſe *dies Aegyptiacus*, congruens cum D. XX. *Junii* Romanorum & XXVI. *Payni* Aegyptiorum. Ita enim in Kalendario legimus: D. XII. *Kal. Julii* (XX. Junii) *Dies Aegyptiacus.* Diem hunc, olim Aegyptiis ſolennem ſacrumque extitiſſe, viri eruditi jam pridem, ducta ex hodiernis Aegygyptiorum moribus & ritibus conjectura, obſervarunt. Quam in

(x) *VANSLEB* ubi ſupra p. 57. *MAILLET* Tom. I. p. 87.

in rem apponere juvabit verba VANSLEBII, cui literae hae plurimum debent, & qui aliorum diligentiam, velut ſtimulis admotis incitavit. Sic vero ille. (y) D. XXIX. *Junii, qui Sanctorum Apoſtolorum, Petri & Pauli memoriae, conſecratus eſt, incipiunt incrementorum Nili progreſſus, per urbem Cairum publice annuntiare. In Kalendario Coptorum Dies hic eſt* XXVI. *Payni, quo etiam peragunt Feſtum Gabrielis Angeli. Diem illum Sermone Arabico, qui nunc hominibus illis vernaculus eſt, nuncupant* Beſciaret innil be Masre, *id eſt* DIEM, QVO INCREMENTA NILI ANNUNTIANTUR CAIRI. (z) Paulo ante autem obſervaverat, idque jure merito, adhibitos ab antiquioribus in negotio hoc ritus, maxima ex parte hodienum ſervari. Mitto alios, qui ejusdem rei relationes hiſtoricas nobis reliquerunt. Id unum ex Vanslebio nunc obſervaſſe, ſatis mihi erat, diem ſolennitati huic deſtinatum à Coptis, ſive Aegyptiis eſſe D. XXVI. *Payni*, diem illum ipſum, qui in Kalendario Romano notatus eſt ceu *Dies Aegyptiacus*. Crediderunt nempe ab omni tempore Aegyptii D. XII. vel XIII. *Payni*, guttam roris cœleſtis, in Nilum fermenti inſtar illabentis, incrementa ejus efficere, & praeſagire, poſt aliquot autem dies, illa ita conſpicua evadere, ut jam incrementi gradus obſervari poſſent. Hosce incrementi Niliaci gradus publice primum D. XXVI. *Payni* annuntiare, & ſic us-

(y) *VANSLEB* ubi ſupra p. 68.

(z) ibid. p. 67.

usque ad Menſem *Phaophi* pergere, ſemper moris fuit. Plura alia de diei hujus celebritate in medium adferre poſſem. Verum plus ſatis mihi jam videor de *diebus* noſtris *Aegyptiacis* diſſeruiſſe. Tempus igitur eſt, ut ſcriptioni huic modum finemque ſtatuam, atque vela contraham.

§. XIX.

Antequam vero finiam, aequum eſſe cenſeo, ut dubiis nonnullis, quae lectorum animis objicere ſe poſſent, occurram, eaque pro virili evellam. Quid enim, inquiat aliquis, Aegyptii Romae morantibus, & vitam forte totam tranſigentibus, cum Nilo, ut de incrementis ejus ſolliciti eſſent, eorumque memoriam annuam religioſa celebritate recolerent? Objectionem hanc fateor eſſe notae levioris. Quia tamen mihi in mentem venit, credidi id, quod mihi contigit, contingere aliis itidem poſſe. Satiſfaciam igitur dubio huic, ſed paucis. Aegyptiis omnibus, ſive in patria, ſive alibi locorum viverent, nihil unquam, neque majus, neque Sacratius, neque venerabilius erat Nilo fluvio, cui Aegyptus, patria dulciſſima, tantam bonorum copiam debebat. Totam Aegyptum credebant (a) *imaginem coeli?* & in ea Nilum ſepteno ſuo alveo, ſidera coeli imitari jactabant. Quae res MANILIUM non latuit, ex mente Aegyptiorum ita canentem

 (b) *Abs-*

(a) Pseudo-HERMES TRISMEGISTUS allocutione ad Aſclepium inter Opera APULEJI pag. 90. Edit. Elmenhorſtii.

(b) *Atque haec Niliacas demum eſt menſura per oras,*
Qua rigat aeſtivis gravidus torrentibus arva
Nilus & erumpens imitatur ſidera mundi
Per ſeptem fauces, atque ora fugantia Pontum.

Idem teſtatur HELIODORUS, qui (c) *Deum eſſe*, inquit, *Nilum fingunt Aegyptii, & ex Numinibus maximum ducunt, aemulum eſſe cæli, fluvium praedicantes.* Itaque (d) *ſolennitates ipſorum ſacrae ad unam omnes ſpectabant ad Nilum*, (e) *nihilque erat, quod tam impenſe colerent* Aegyptii, *atque hunc fluvium.* Quin imo ſcimus ex teſtimonio SERVII, celebris Grammatici, Aegyptios Romae, in Sacris, Nilum quaſi praeſentem videre ſibi viſos eſſe. (f) *Sciendum,* ait *in Sacris ſimulata pro veris accipi —— Nam & in Templo Iſidis* Romae *aqua ſparſa de Nilo eſſe dicebatur.* Eſtne igitur, quod quis miretur, Feſta in honorem Nili adſcendentis, & agros Aegypti irrigantis decreta, ab Aegyptiis Romae etiam celebrari conſueviſſe.

§. XX.

Verum id forte altioris indaginis quibusdam videatur, quod praeter *dies Aegyptiacos*, de quibus nondum ſatis liquet,

---

(b) Aſtron. Lib. III. p. 73. Ed. Scaligeri. Ceterum ſecutus ſum emendationes R. BENTLEJI ſummi viri.

(c) Aethiopic. Lib. IX. p. 423. Ed. Bourdelot.

(d) ARISTIDES Rhetor in *Aegyptiaco* fin p. 96. b. Edit. græcae Florentinae.

(e) PLUTARCHUS de Iſid. & Oſir. p. 629. Ed. H. Steph.

(f) in Virgilii Aeneid. Lib. II. vs. 116.

quet, in *Kalendario* noſtro commemorentur Feſta alia, velut *Iſidis Navigium, Serapia, Iſia*, de quibus nemo ſane ambigit, quin ſignificent ſolennia Religionis Aegyptiorum Sacra. Cur illa, dicat quispiam, ab *Aegyptiacis diebus* manifeſto diſtinguuntur, ſi tamen *dies Aegyptiaci*, feſtos gentis hujus dies deſignent? Non negabo igitur, quod res ipſa clarius multo loquitur, quam ut negari poſſit, eſſe aliquam inter *Iſia* ac *Serapia*, & *dies Aegyptiacos* discrepantiam. Verum discrepantiam hanc in eo ſitam eſſe contendo, quod Feſta Aegyptiorum notiora, *Serapia* nempe ac *Iſia*, Sacra quaedam peculiaria deſignent, ab antiquo inter Romanos nota & celebrata, *dies* vero *Aegyptiaci*, Solennitates gentis hujus in univerſum omnes ſignificent, diu poſt, auctoritate Imperatorum, & permiſſu Senatus Romani introductas, & promiscue tum publicè concelebratas. Quod ad priora illa *Iſeorum* & *Serapiorum* Solennia attinet, videntur ea non tam ab ipſis Aegyptiis, quam potius à Græcis ad Romanos transmiſſa fuiſſe, & paulatim Sacris horum patriis annumerari coepiſſe. Certe in non uno ex vetuſtioribus Romanorum Kalendariis Solennia haec, ut Romana inter reliqua referi, nemini obſcurum eſſe poteſt.

§. XXI.

Ut hoc exemplo aliquo ſatis luculento illuſtrem, eſt inter antiquiora Aegyptiorum Feſta, Romae celebrari ſolita, & in *Kalendario* noſtro annotata, aliquod, quod *Navigium Iſi-*

dis

dis nuncupatur, ad D. III. *Non. Martii* vel V. Martii. Illud vero Sacrum, quale nempe in Graecia & Romae celebrari ſolebat, exiſtimo in univerſum ingenio Græcorum deberi, non Aegyptiorum, ut igitur longe potiori jure, pro ſolennitate Romana haberi poſſit, quam pro Sacro religionis Aegyptiacae. In eadem ſententia video quoque fuiſſe LACTANTIUM, cum in haec verba ſcriberet. (g) *Quo igitur argumento probari poteſt, nec Europam in Tauro ſediſſe, nec Jo factam bovem? Quod certus dies habetur* IN FASTIS, *quo* ISIDIS NAVIGIUM *celebratur: quae res docet, non tranaſſe illam, ſed navigaſſe.* Igitur dies ille habebatur in *Romanorum Faſtis.* Et celebritatis illius vera origo, non ex fabulis allegoricis Theologiae Aegyptiorum, ſed Græcorum ſolorum, peti recte poteſt. Non equidem ignoro, Aegyptios in Faſtis ſuis, aliquod etiam celebraſſe *Iſidis* ſuae *navigium*, quod ita appellare poſſis, diem nempe, quo memoriam reditus Deae hujus e Phoenicia in Aegypto recolebant. Verum Aegyptii Sacrum illud vocabant, ut diſerte PLUTARCHUS tradit (h) *ἄφιξιν Ἴσιδος ἐκ Φοινίκης, adventum Iſidis e Phoenice*, Graeci vero & Romani ſolennitatem ſuam dicebant *navigium Iſidis.* In eo quidem parum omnino ſitum. Verum id majoris utique momenti quivis facile putabit, quod Aegyptii Solennitatem illam peragerent (i) D. II. *Januarii,*

(g) Lib. I. cap. 11.

(h) de Is. & Oſir. p. 662. Edit. Steph. vel 371. Paris.

(i) Vide PLUTARCHUM loc. cit. Vide & hanc Commentationem Supra §. X.

nuarii, ea anni tempeſtate, (k) qua mare frequentari nondum ſolebat, Graeci vero & Romani celebritatem ſuam conjicerent in Menſem *Martium*, aut illam anni partem, qua navigaturis mare nunc apertum eſſe credebatur. Solennitas Aegyptiaca ſpectabat ad Oſiridem jam jam inveniendum, græca vero ad felix navigationis auſpicium. Eam celebritatem prolixe APULEJUS deſcribit, ubi inter alia & haec legimus. (l) *Tunc unus ex his, quem cuncti Grammatea dicebant — fauſta vota praefatus Principi magno, Senatuique & Equiti, totoque Romano Populo, NAUTICIS NAVIBUS, quæque ſub imperio mundi noſtratis* (m) *reguntur, renuntiat ſermone rituque græcienſi, ita* ΛΑΟΙΣ ΑΦΕΣΙΣ. In verbis hisce græcis mirum in modum eruditi ſe torſerunt. Multi ea contulere cum celebratiſſima illa formula, qua olim concionem plebis Chriſtianæ dimittere moris erat. *Ite miſſa eſt.* Verum concionem illam, de qua Apulejus loquitur, verbis illis dimiſſam nondum fuiſſe, ex iis, quæ illico ſequuntur, certo perſpicitur. Res ipſa clare docet, legendum eſſe ΠΛΟΥ

(k) Epigramma græcum de Menſibus Aegyptiorum, in ANTHOLOGIA Lib. I. c. XCI. num. II. initium navigationis refert ad *Mecbir* menſem, reſpondentem *Februario* Romanorum

Σημαίνει πλωτῆρσι Μεχεὶρ πλόον αμφιπολεύειν

Indicat nautis Mecbir navigationem inſtituere.

(l) Lib. XI. Mileſiorum p. 265. Edit. Elmenhorſtii.

(m) Malim hic legi *vehuntur.* Senſus tum perſpicuus, *renuntiat nauticis navibus quaeque* (pro *quaecunque*) *ſub imperio mundi noſtratis vehuntur.* Fauſta igitur quaeque Grammateus ille apprecabatur navibus in Orbe Romano iter facturis.

ΑΦΕΣΙΣ, id eſt *Navigationis initium.* ἄφεσις Græcis *initium* rei cujuscunque ſignificat, ducta metaphora à carceribus in ſtadio, ex quibus dimittebantur curſores, curſum ſuum auſpicaturi, quod erudite docuit (n) SALMASIUS. Quando igitur Grammateus ille, omnibus, ac *navibus nauticis* ſigillatim renuntiabat ΠΛΟΥ ΑΦΕΣΙΣ, idem eſt, ac ſi dixiſſet: *Licet nunc omnibus navigationem feliciter auſpicari.* Unde confeſtim ſequitur apud APULEJUM. *Quam vocem feliciter cunctis evenire, ſignavit populi clamor inſecutus.*

§. XXII.

Ex his intelligi jam poteſt, *navigio Iſidis*, & aliis nonnullis *Iſeorum & Serapiorum*, ad Græcorum ritus inflexorum ſolennibus, Romæ locum dari potuiſſe, antequam tota Aegyptiorum religio civitate donaretur. Et id re ipſa etiam uſu veniſſe, ex genuinis hiſtoriae Romanae Monumentis (o) a viris eruditis egregie demonſtratum jam eſt. Ad antiquiora illa Feſta, pauca tantum numero, quibus Roma à longo jam tempore aſſueta erat, acceſſerunt tandem, Seculo poſt Chriſtum natum ſecundo & tertio, ſub Antoninis, Commodo & Caracalla, *dies* noſtri *Aegyptiaci*, totam Sacrorum ab Aegyptiis inſtitutorum ſeriem complexi, qui etiam nonniſi ſublata tota in univerſum Gentilium ſuperſtitione celebrari deſierunt.

Jo.

(n) de Annis Climactericis p. 268.

(o) Vide cumprimis CUPERI Harpocratem p. 149. 150.

Jo. Chriſtoph Haarenberg.

Exercitatio, ad geographiam referenda, de regione & vrbe

Amathe, *Hemath*, חֲמָת, ad ſeptemtriones Palaeſtinae poſita.

S U M M A.

§. I. *Amathe ad ſeptemtriones Cananaeae fuit ſita.*

§. II. *Amathe comprehendit regionem circumiectam.*

§. III. *Amathe eſt Heliopolis, On, Balbec.*

§. IV. *Amathe vicina fuit & conterminia Damaſco.*

§. V. *Amathe ad auſtrum Eleutheri fuit ſita.*

§. VI. *Exponuntur loca, 2 Reg. XIX, 13 commemorata.*

§. VII. *Loca, quae in limite Cananaeae ſeptemtrionali deſignando occurrunt Num. XXXIV, 7-12. Joſ. XIII, 5. exponuntur.*

§. VIII. *Exponuntur loca, quae memorantur 2 Reg. XVII, 24.*

§. IX. *Fluvius Cananaeae terminalis ad ſeptemtriones haud exſtitit Euphrates, ſed Orontes. Situs loci Haran deſignatur.*

§. X. *Heliopolis eſt antiqua Amathe.*

§. XI. *Amathe non eſt Antiochia.*

§. XII. *Nec Epiphania.*

§. XIII. *Nec Emeſa.*

§. XIV. *Additur uſus tractationis.*

§. I.

Locus *Hemath*, *Amathe*, *Chamath*, *Emath*, Ἡμάθ, in ſacris litteris V. T. frequentiſſime memoratur ac repetitur. Terminus Cananaeae, ad boream adſurgentis, exſtitit Chamatha ſeu Hemath.

mach. 1 Chron. XIII, 5, Num. XIII, 21. 1 Reg. VIII, 65. Ezech. XLVII, 16, 17, 20. Limitem ſeptemtrionalem Cananaeae, quam inter XII. tribus Joſua diſtribuit ac definiuit, Joſephus, luculentiſſimus rerum Judaicarum ſcriptor, fuiſſe Ἀμαθὴν ſeu locum *Amathen*, tradidit (a). Salomo, encaenia prima ſeu inaugurationis feſtum ipſa tabernaculorum die ſolemni celebraturus, ad templum nouum, ab ipſo exſtructum, conuocauit Judaeos quoscunque, inde ab vno Palaeſtinae termino ad alterum, nominatim vero מלבוא חמת עד־נחל מצרים *a via regia, qua proxime ibatur Amathen vsque ad alueum Aegypti*, qui Cananaeæ & Aegypti fines interfluebat. 1 Reg. VIII, 65. Quum vero alueus ille ad meridiem verſus Aegyptum exſtitit limes Cananaeae, inde conſequitur ac efficitur, Amathen fuiſſe confinem illi tractui, qui ad ſeptemtriones Palaeſtinam terminauit. Idem ſitus Amathes pateſcit ex ratione itineris, quod exploratores, in Cananaeam ablegati, inſtituerunt. Ipſi enim id ſuſceperunt a limite auſtrali & ex deſertis loci Zin, atque illud perfecerunt, Palæſtinam, qua ad ſeptemtriones protenditur, emenſi, vsque ad Rehob, qua itur Amathen, עד־רחב לבא חמת. Num. XIII, 21. *Rehob* ſeu *Rechob* exſtitit locus Aſeritidis, ad ſeptemtriones ſitus. Jud. I, 31. Joſ. XIX, 28. EUSEBIUS tradit, eſſe vicum Ῥοὼβ quatuor milliaribus Romanis a Scythopoli disiunctum. Sed facile, litteram μ excidiſſe, & ſolam litteram δ remanſiſſe in contextu, intelligitur. HADRIANUS RELANDUS ſuſpicatur,

(a) *Antiqq. Jud. IX.* 11.

tur, locum Rechob ab Amathe haud differre (b). Ipſum, credo, poſtea huius coniecturae poenituit, eam enim in loco aptiori, vbi de Rechob vrbe egit, non exiſtimauit repetendam. Suberat immutandae ſententiae ratio. Diſtinguuntur omnino in veteris teſtamenti codice Reges Amathes a Regibus Rechobi. Vates & doctor diuinus, Ezechiel, in deſcribendis Cananaeae terminis multum operae poſuit, exorſus a termino boreali & quidem ab Amathe, (c) & in eodem limite ſubſiſtens (*). Quae quum ita ſint, id certum & extra dubitationem eſt ſitum, Amathen vltra fines Cananaeae ſeptemtrionales in Syria eſſe inveſtigandam.

§. II.

Amathe autem ſeu *Chamath* non ſolum exſtitit domicilium, hominibus in vnum coëuntibus aptiſſimum atque accommodatum, ſed etiam regio & tractus integer. Jeremias c. LII. 9. commemorat, Zedekiam, Judaeorum Regem, in exſilium fuiſſe abſtractum, ad Regem Babylonis Riblatham ſeu Raphaneam, Coeleſyriae vrbem, in *regionem Chamath*. Eamdem regionem denuo repetit in inciſo viceſimo ac ſeptimo. Neque id adnotaſſe a loco eſt hoc alienum, tractus ac regiunculas vrbibus adiectas ſaepiſſime in ſacris litteris inſigniri nominibus vrbium ipſis, quae in illis regiunculis ſunt poſitae. *Amathe* exſtitit ciuitas, urbs, & munimentum. Adnumeratur enim vrbibus, Damaſco & Zobae 2 Sam. VIII. 5, 9. 1 Chron.

(b) *Palaeſtinae* L. I. c. 25. p. 119.
(c) Ezech. XLVII. 16. (*) v. 20.

1 Chron. XIX, 3. vrbibus *Arvad* ſeu *Antarado*, *Sepharvaim*, *Henae & Ivvae* 2 Reg. XIX, 13, aliisque praeterea adiectis 2 Reg. XVII, 24. Quando autem Zoba dicitur fuiſſe ſita in *Amathe* 1 Chron. XIX, 3. & Zoba inde dicitur חֲמָת־צוֹבָה *Amathes Zoba* ſeu *Amathenſis Zobah* 2 Chron. VIII, 3; tum nemo non intelligit, Amathenſem deſignari tractum ac regionem. Nunc porro incidit quaeſtio, vbinam *Amathe* ſit locanda, & quem quondam ſitum obtinuerit?

§. III.

Si ſingulas rationes ſub vnicum reuocauerimus conſpectum, Heliopolin, in valle Libanum inter & Antilibanum ſitam, eſſe eamdem ac Chamatham ſeu Amathen, non poſſumus infitiari. Quod ipſum ſi euicerimus, facile erit divinatu, *vallem ſolis* ſeu בִּקְעַת אָוֶן eamdem eſſe ac regionem, quam veteres ab vrbe vicina dixere Amathen. Heliopolin nunc vocari *Balbec*, quaſi בִּקְעַת בַּעַל (*) *vallem ſolis*, ex itinerum ſcriptoribus ac aliunde ſatis eſt notum (d). Videatur inprimis *De la ROQVE* To. I. *Voiage de Syrie & du Mont Liban* p. 94, nec non *MAVNDRELLVS* Anglus in *Itinere Hieroſolymitano*, Gallice etiam & germanice edito, p. 170 atque *CAMPEGIVS VITRINGA* in *Commentario ad Eſ.* LVII, 5. Denotatur autem voce אָוֶן ſeu און *Sol*, vti ex Heliopoli, vrbe Aegypti, quam Ebraei pariter *On* vocarunt, ſatis innoteſcit.

§. IV.

(*) AMOS I, 5.

(d) Ex profeſſo hoc iam demonſtrauit Cl. PETRUS ZORNIUS in *Muſeo Bremenſi* P. I. faſc. II. Diſſ. 4. p. 282. ſqq.

§. IV.

Primam & palmariam rationem, cur ita ſentiam, deſumo ex eo, quod vrbs *Amathe* fuerit confinis & contermina vrbi Damaſco. ZACHARIAE verba ſunt luculenta & extra controuerſiam poſita, quae leguntur c. IX, 2. חֲמָת תִּגְבָּל בָּהּ *Amathe finitima eſt Damaſco.* Eadem fere indicat Jeremias, quum Amathen pudere refert Damaſci c. XLIX, 23. Damaſcus vero eſt vrbs Syriae, vltra Antilibanum ſita ad Orientem, 400 ſtadiis disiuncta a mari Aegeo, vti e Strabonis L. XVI colligitur. Interuallum, quod Damaſcum inter & Heliopolin intercipitur, ſic digeritur in Itinerario Antonini ſiue Aethici:

Damaſco	
Abilam	M. P. XXXVIII.
Heliopolin	M. P. XXII.
Conna	M. P. XXXII.
Laodiceam	M. P. XXXII.
Emeſam	M. P. XVIII.

Ptolemaeus Heliopolin, Abilam & Damaſcum vrbes ponit in Coeleſyria. Heliopolin Libano eſſe propinquam, autor eſt Sozomenus H. E. L. I. c. 8. L. V. c. 10. *Notitia Eccleſiae* Heliopolim locat in Phoenice Libaneſia, quae Coeleſyriam propriam complectitur. PLINIUS (e) iuxta Heliopolin, Libanum inter & Antilibanum, Orontem amnem oriri, credit, quod tamen, niſi in ſenſu latiori ſumatur, experientiae repu-

(e) H. N. L. V. c. 22.

repugnat. Nam origo Orontis, teſte *de la Roque* (f) ab Heliopoli ſatis eſt remota. POLYBIUS (g) de ortu Orontis ita diſſerit: *Is amnis, e proximis Libano & Antilibano locis primum ortus, per eam, quam Amycae planitiem nominant, labens, Antiochiam petit.* Hic fluvius in ſacris V. T. dicitur litteris *Phrath*, Euphrates autem dicitur *Kebar*, quod alibi demonſtrabimus. Quum Dauides ad amnem *Phrath* ſeu Orontem ſigna eſſet collaturus, cum regibus Damaſci ac Zobae manum conſerere debuit, laetante de eorum ruinis Rege Amathes, qui a vicinis illis Regibus nil niſi hoſtilia & calamitoſa metuebat. (h) Quo ipſo teſtimonio rurſum docemur, Amathen Damaſco exſtitiſſe vicinam. Scriptor onomaſtici arabici geographicus, quem Cel. ALBERTUS SCHULTENS ſubiunxit vitae Sultani Salahaddini, de Heliopoli ſeu Balbeck ita diſſerit (i): *Balbec eſt oppidum, trium dierum itinere a Damaſco diſtans, vbi pulchra fundamenta & praeclarae veteres aedificiorum reliquiae inueniuntur, nec non palatiorum pilae marmoreae.* De aedificiorum ac templi praeſtantiſſimi reliquiis ex profeſſo egerunt MAUNDRELLIUS & *de la ROQVE*, ac ſocietas Anglorum eruditorum, quae coniunctis viribus *hiſtoriam vniuerſalem* ab orbe condito ad noſtra vsque tempora

(f) *Voyage de Syrie & du Mont-Liban* To. I. p. 134. ſq.

(g) *Hiſtor.* L. V. c. 59.

(h) 2. Sam. VIII. 5. ſqq.

(i) Apud Cornelium Weſterbaen in *Algemeene Hiſtorie* L. I. Cap. V. To. II. Sect. I. p. 224.

pora coepit adornare. Non equidem ad Libanum, ſed ad Antilibani radices, occidentem proſpectantes, Heliopolis eſt ſita, ſi proprie loqui lubeat. Sed veteres nonnunquam Antilibano etiam nomen Libani impoſuerunt.

§. V.

Amathen & χώραν Αμαθῖτιν, *terram Amathiticam* ad auſtrum amnis Eleutheri eſſe reperiendam, intelligitur ex 1 *Macc.* XII, 25, 30, vbi legimus, Jonatham profectum eſſe Hieroſolymis in terram Amathen, deſtinationes Demetrii Syrorum Regis occupaturum: quod quum hoſtis animaduertiſſet, in regionem ſeptemtrionalem verſus Antiochiam, transiecto Eleutherum exercitu, fugam ipſe capeſſiuiſſe dicitur. Jonathas fugientibus ad illum fere amnem haeſit in tergo. Deinde, eis omiſſis, Arabas Zabdeos infeſtauit & Damaſcum reuertit. Simulac igitur ſitus amnis Eleutheri innotuerit, ipſius etiam Amathes poſitus ſitusque dilucebit.

Monendns autem eſt lector, ne opiniones ſcriptorum mediae & recentioris aetatis ſequatur, qui *Lanten* amnem pro Eleuthero veterum habuerunt, quem quidem errorem Chriſtophorus Cellarius, Hadrianus Relandus, & Henricus Maundrellius notarunt atque refellerunt. Standum nobis eſt veterum ſcriptorum teſtimonio, quorum aetate autor libri Maccabaeorum denotati vixit ac ſua monumentis litterarum ſcripta conſignauit. *Lantes*, quem Turci vocant *Caſimeer*, ex valle, Libanum inter & Antilibanum interiacente, verſus auſtrum & occidentem defluit, atque Tyrum inter & Sidonem

mari magno ſeſe committit. Eleutherus vero ad ſeptemtriones magis eſt reducendus ac locandus. STRABO, autor fide digniſſimus, Eleutherum ſeſe inter Tripolin ac Orthoſiam in mare exonerare, commemorauit (k), ita diſſerens: Μετὰ Ορθωσίαν ἐςὶ καὶ τὸν Ελεύθερον Τρίπολις. *Poſt Orthoſiam & Eleutherum eſt Tripolis.* Deſcribit ipſe littus Syriae inde a ſeptemtrionibus ad auſtrum. PLINIUS hunc in modum (l): *Tripolis, quam Tyri & Sidonii & Aradii obtinent. Orthoſia, Eleutheros flumen. Oppida: Simyra, Marathos* &c. Syriam Seleucidem & Phoenicen diſcreverunt, Ptolemaeo arbitro, oſtia fluminis Eleutheri, ἐκβολαὶ Ἐλευθέρȣ ποταμȣ̃. Ptolemaeo adſentitur STRABO, cuius teſtimonium vacat tenebris & dubitatione. En illud: *Laodiceae propinqua ſunt oppidula, Poſidium, Heraclium, & Gabala: inde antiqua Aradiorum iam regio, Paltus, Balanaea, & Caranus Aradiorum nauale: poſtea Enydra & Marathus, antiqua Phoenicum vrbs, nunc diruta: agrum forte diuiſum Aradii tenent. Deinceps eſt Taxymira, Orthoſia, & Eleutherus amnis, quem quidam Seleucidis terminum faciunt, Phoenicen & Coelen Syriam verſus.* (m) Poſtrema in Graeci ſermonis complexu ſunt luculentiora & plus in receſſu habentia. Τȣ́τοις δ' ἡ 'Ορθωσιὰς συνεχής ἐςι, καὶ ὁ Ελεύθερος ὁ πλησίον ποταμὸς, ὅνπερ ὅριον ποιȣ̃νται τινὲς τῆς Σελευκίδος πρὸς τὴν Φοινίκην καὶ τὴν Κοιλὴν Συρίαν. *Hiſce vero Orthoſias contigua eſt, ac*

(k) Lib. XVI. p. 754.

(l) H N. L V. c. 20.

(m) Lib. XVI. p. 753.

ac Eleutherus, vicinus ille (Orthoſiadi) *fluvius.* Ita eſt in Graeco. Strabo littus maris Syriaci a ſeptemtrione ad auſtrum perſequitur; Plinius in contrarium tendit. Quid vero iam facilius eſt demonſtratu & magis in procliui, quam Tripolin inter & Orthoſiam ſeu Orthoſiadem flumen Eleutherum Oceano ſeſe inſinuaſſe? CHRISTOPHORUS CELLARIUS (n) Eleutheri oſtia inter Antaradum & Simyra poſuit. HENRICUS MAUNDRELLIUS eadem fere adprobat (o), paullulum tamen fluctuatus. Si ad exemplum praetoris Romani minima haud curamus, illud tamen iubare meridiano clarius hinc elucet, Eleutherum vltra Tripolin ad boream ex Libani confiniis & valle *cauae*, ſeu *Coeles Syriae* defluxiſſe. Quo ipſo pateſcit, vrbem Amathen, quippe ad auſtrum magis reductam, intra Syriam cauam, haud procul a Damaſco, fuiſſe ſitam.

§. VI.

Sennacheribus, Aſſyriorum ac Babyloniorum Rex, ab Herodoto commemoratus, Regem *Amathes*, *Arvadi* & oppidi *Sepharvaim* vrbiumque *Hena* & *Ivva* deuicerat, per Syriam transgreſſus in Palaeſtinae oram. (*) Mentio locorum circumiectorum illuſtrat vrbem ſeu terram Amathes. Aradus eſt *Arvad*, nunc *Ruad* dicta. In inſula Arado regnum erat ſingulare, cui in continenti *Caranus*, *Antaradus* & alia

Mmm 2 loca

(n) In Tabula Syriae antiquae.

(o) In *Itinerario Palaeſtino*, edit. Hamburg. German. 1706. 8. p. 33.

(*) 2 Reg. XIX. 13.

loca quondam erant ſubiecta. Alexandri M. aetate Strato Rex inſulae præerat (p), cui etiam Marathus & Mariame in in littore Syriae oppoſito parebant (q). Inſula Aradus erat ſeptem ſtadiorum, vnicam vrbem cognominem complexa, ducentos paſſus a continente diſtans (r). Eadem modo Seleucidi, modo Phoenice, adtribuebatur, ſiquidem erat inter Caranum & Marathum, a littore XX. ſtadiis disiuncta (s). STRABO oſtendit, olim ſingulis Phoenices vrbibus ſuos exſtitiſſe reges peculiares. Ipſe ita diſſerit (t): Τὸ παλαιὸν οἱ Ἀράδιοι καθ' αὑτοὺς ἐβασιλεύοντο παραπλησίως, ὥσπερ καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη πόλεων τῶν Φοινικίδων. *Olim Aradii per ſeſe Reges habebant, vt ceterae Phoenicum ciuitates.* Quod pronuntiatum exemplis eis, quae in tabulis V. T. Sacris perſcripta exſtant, ſatis ſuperque confirmatur. De Arado eaque per אַרְוָד *arvad* Gen. x, 18. Ez. xxvii, 11. intelligenda, erudite diſſeruit Maundrellius (u). HENA ſeu INA, ENA, ENAN, *Chatzar-Enan*, ab vrbe Damasci haud procul abſuit. Ptolemaeus *Inam* ad occaſum Damasci poſuit. EUSEBIUS de *Chatzar-Enan* tradit, quod ſit ὅριον Δαμασκοῦ *confinium Damasci. Ivva* עִוָּה, & *Abida* haud differunt. Ipſa haud procul Damasco fuit ſita verſus auſtrum & Inam. Ptolemaeo hanc

(p) CURTIUS IV. 1.

(q) ARRIANUS L. II. p 119.

(r) PLINIUS H. N. V. 20.

(s) STRABO L. XVI. p 753.

(t) Pag. 754.

(u) Pag 26. Aradios fuiſſe nautas militesque inſignes, patet ex Ezech. XXVII, 8. 11.

hanc debemus veritatem. Sed quid de loco *Sepharvaim* fiet? quid de illo eſt ſtatuendum? anne idem alibi contracte vocatur *Schepham*? Nullus dubito, quin intelligenda ſit vrbs *Paradiſus*? Exſtitit illa in Laodicena, parte Syriae cauae, teſte Ptolemæo. Eandem memorant Plinius & Stephanus Byzantius. Alibi hic locus vocatur *hortus regis* & *Gan eden*, hortus voluptatis, i. e. viridarium. Nomen etiam ei exſtitit בית עדן *Beth Eden*, vnde factum fuit *Bedegene*, oppidum, quod Wilhelmus Tyrius commemorauit. Ezechiel locum *Eden* ponit in Syria, eique adiungit vrbem *Haran*, & *Canne*, *Aſſur* & Kilmad, c. XXVII, 23. Haran erat vrbs *Aramaeae batanaeae & interamnenſis*, vnde poſtea regio circumiecta nomen Avranitidis obtinuit. *Conna* ſeu *Canne*, & Gaana, differunt. Locus prope Damascum vterque ad ſeptemtriones fuit ſitus. *Aſſur* videtur *Arethuſa* fuiſſe. *Kilmad* ſeu *Calamos* locus eſt Plinio (*) haud ignotus. Ex quibus ſingulis, licet vnus & alter locus ſit in incerto, id ad minimum ſequitur, *Amathen* ſitam fuiſſe in Coele Syria.

§. VII.

De limite ſeptemtrionali terrae Abrahamo promiſſae Deus ita pronuntiat *Num.* XXXIV. 7 — 12: *Hic vero erit terminus veſter Septemtrionalis. A mari magno*, inde a Sichor alueo iuxta oram Aegypti, *progrediemini ad boream vtique ad montem Hor*, ſeu Libanum. *Inde a monte Hor continuabitis poſſeſſionem* Heliopolin vsque ſeu *vsque ad Amathen*, *terminus-*

 que

(*) H. N. L. V. c. 20. Confer POLYBIUM *Hiſt.* L. V. c. 68.

que inde excurret Zedadum vsque. Porro excurret limes ad Siphronem atque patebit in Chatzar Enan. Hinc vobis pro termino delineabitis, ad ortum ſolis figendo, inde a Chatzar Enan ad Schepham, vt decurrat terminus ex Schepham ad Ribla ſeu Rephaneam in Coele Syria. *verſus ortum ſolis* ad *Ain* ſeu *Inam*, *& inde deſcendat terminus & pertineat ad latus maris Geneſaritici orientale per Jordanem & ad vltimam vsque oram auſtralem maris bituminoſi.* Per locum Schepham Chaldaei interpretes, tum Jonathan, tum Hieroſolymitanus intellexerunt *Apamiam*, quam reddiderunt Chaldaice אפמיאה & אפמיא. Quam interpretationem adprobauit Joannes Lightfootus in Add. c. IV. ad 1 Cor. XIV. Per Zedadum intelligo *Poſidonium*, quod a Joſua exiſtimo dici *Sidona magnam* c. XI, 8, XIX, 28. Per *Siphronem* intelligo *Daphnen*, Antiochiae vicinam, cypariſſis nobilem & palmis. Vt enim אֵלוֹן *Elon* ſeu, ut Euſebius & Hieronymus habent *Aulon* denotat locum late patentem, *quercubus* praecipue conſitum: ita זִפְרוֹן locum notat cypariſſis longe lateque diuitem. Et hac quidem ratione ad terram promiſſam referenda fuit Phoenice, Coeleſyria propria, Laodicene, Caſiotis, & pars Seleucidis. Ne vero de eo dubites, operae pretium fuerit audire Joſuam, qui hanc expoſitionem confirmat c. XIII, 5 hunc maxime in modum: *Supereſt* Judaeis *occupanda regio Gabalenſium* (*) *& omnis Libanus,*

verſus

(*) Orientales vocant montem *gebel*, Arabesque voce ea adhuc in primis vtuntur. Inde tractus *Hor*, i.e. ex iugis montium conſtans, dicitur *Gebalene*. Vnde facile patet, *terram* גִּבְלִי *Gabalenſem*, vnde Gabala dicta, denotare Libanum, & montem Syriae littoribus parallelum.

verſus Orientem inde a BaalGad, (i. e. Antilibanus) *ſub monte Hermon ad Amathen* regionem vſque. Haec vero regio omnem occidentalem, Oronti adiectam terram, & ipſam Raphaneam fuit complexa, ſiquidem haec in terra Amathe ſeu Amathitide erat ſita. Gabala ad littus Syriae haud procul ab oſtio Orontis fluvii exſtitit ſpectanda. STRABO inde a ſeptemtrionibus vrbes Syriae littorales ita enumerat: *Poſidium*, quod alii vocant Poſidonium, *Heraclium & Gabala: dein antiqua Aradiorum regio, Paltos, Balanaea, & Caranus, Aradiorum portus.* Gabala nunc vocatur *Jebilée* ac partem murorum theatri olim praeſtantisſimi adhuc oſtentat. (x) Ex oppido Gabala traducti fuerunt *Giblim*, architecturae peritiſſimi, & ex vrbe Palto *Pletim*, milites fortiſſimi, ſiquid adſequor coniectando. Suffecerit nobis in praeſens, oſtendiſſe denuo regionem Amathitin fuiſſe Judaeae a ſeptemtrionibus adiectam, haud procul a BaalGad, loco, qui Hermonem adtigit & ad regionem Cis-Jordanicam fuit relatus.

§. VIII.

Quum Rex Aſſyriorum loco incolarum, ex regno Iſraëlis in exſilium abreptorum; colonos nouos deduceret in regionem tribuum decem Cananaeae; incolas nouos adſciuit ex vrbibus locisque *Babel, Cutha, Ava, Emath*, & *Sepharvaim*: 2 Reg. XVII, 24. Heic denuo vrbis Amathes fit mentio. Inquirendum nunc eſt, an ex notitia locorum adiectorum ſitus Amathes poſſit illuſtrari. *Sepharvaim* & *Paradiſus* eſt locus

vnus

(x) MAUNDRELLIUS l. c. p. 17. ſq.

vnus idemque (§. 7.) *Ava* ſeu *Ivva* eſt *Abida*, a Ptolemaeo (x) memorata, Damaſcum inter & Panium & montem Chermonem poſita. *Cutha* eſt Caſiotidis locus, templum vicusque Jovis Caſii. De Caſio monte STRABO L. XVI. p. 750. *Antiochenſes Triptolemum vt heroëm colunt & in Caſio monte apud Seleuciam feſtum ei diem agunt*, καὶ ἄγουσιν ἑορτὴν ἐν τῷ κασίῳ ὄρει τῷ περὶ Σελεύκειαν. Ac denuo p. 751 ibidem ita diſſerit: *Antiochenſibus ad auſtrum Apamia eſt, in mediterraneis ſita*, ἐν μεσογαίᾳ κειμένη: *Seleucenſibus vero Caſius mons & Anticaſius. Adhuc vero priori in loco pone Seleuciam ſunt Orontis oſtia, poſtea vero Nymphaeum ſpecus quoddam ſacrum. Poſtea* τὸ κάσιον *Caſium, deinceps Poſidium oppidulum & Heraclea.* Cellarius ſubaudit ὄρος, vt denuo intelligendus ſit mons Caſius. FOURMONTIUS (y) & ante eum SAMUEL BOCHARTUS (z) Caſium exiſtimant dictum quaſi קצי, id eſt, *terminalem*, exponentes de Monte Caſio, qui, Herodoto teſte, Aegyptum & Syriam, Palaeſtinam quippe, diſterminat. Sed, ſiquid in re obſcura videatur ſtatuendum, Caſium montem vtrumque ac regionem Caſiotidem vtrobique adiectam ex *Cuſch*, כוש, dictam fuiſſe, arbitror. Vxor Moſis, ex Caſiotide ortum trahens, certe adpellata fuit כושית *Caſiotica*. Ac Ezechiel oram Aegypti ſeptemtrionalem, Judaeis notiorem, vocavit כוש hoc eſt, *Caſio-*

(x) Lib. V. c. 15.

(y) In *Reflexions critiques ſur les Hiſtoires des Anciens Peuples* L. II. Sect. 3.

(z) *Geogr. Sacr.* L. IV.

Caſiotidem. De Syria Coele ita cecinit Dionyſius Periegetes, v. 899. ſqq.

Ἣν Κοίλην ἐνέπουσιν ἐπώνυμον, οὕνεκ᾽ ἄρ᾽ αὐτὴν
Μέσσην καὶ χθαμαλὴν ὀρέων δύο πρῶνες ἔχουσιν,
Ἑσπερίου Κασίοιο καὶ ἠώου Λιβάνοιο.

Quam Syriae partem *Coelen ſeu Cauam denominant, eo quod ipſam mediam & humilem duo vertices montium continent, nempe Caſii ad occaſum proſpectantis, & Libani, orientem verſus ſeſe extollentis.* Per Libanum intelligit ipſe Antilibanum, ſiquidem haec de Coele Syria exponit, quam a Phoenice, in qua Libanus proprie dictus eminet, curate diſtinxit. CLAUDIUS PTOLEMAEUS L V. c. 15 inter montes Syriae inſignes refert quoque *Caſium montem, cuius medium gradus habeat* longit. 68 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ & latit. 35 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Ad Caſium montem erat vicus cognominis & in vertice templum. Strabo *Caſium* a monte Caſio ſatis diſcreuit, nec opus ibi eſt virgula Cellarii cenſoria ſeu additione critica. Exſtant numi, qui templum Jovis Caſii Syriaci exhibent ſpectandum. Regioni adiectae nomen adhaeſit *Caſiotidis.* Reliqua legi poſſunt apud CHRISTOPHORUM CELLARIUM (a). Mihi ſane perinde eſt, an coloni noui ex Caſiotide, an ex accolis templi a Jove Caſio cognominati, fuerint deſumti atque transducti. Promouemus iam attentionem noſtram ad locum, qui *Babel* vocatur. Plerique ad Babylonem reſpiciunt, Euphrati adpoſitam,

(a) *Geogr. antiq.* L. III. c. 12. p. 412 ſq.

tam, quoties de Babele injicitur mentio. Sed haec a Semiramide & Nebucadnezare demum fuit exſtructa. Vetuſtior verum Babel in Syriae eſt inueſtiganda tractibus. *Antiqua Byblus* ſeu *Palaeobyblus* ad manum eſt & ob oculos, vrbs, ſi fragmento Sanchoniathonis (b) fidem tribuimus, Phoenices antiquiſſima, a Crono exſtructa, ad quam iam ante Cronum, tempore Sydyk & Miſor, habitabant mortales, teſte eodem Sanchoniathone. Cronum Cel. FOURMONT pro ABRAHAMO habet, Noachum vero, qui in litteris ſacris adpellatur צדיק *iuſtus*, eum exſtitiſſe exiſtimat, quem Sanchoniathon vocauerit *Sydyk*. Fragmentum illud eſſe genuinum, tum idem (c) FOURMONT, tum Ven. Abbas GUYON, (d) argumentis oſtendit veroſimillimis. Quum vero poſterior illud crediderit inexplicabile, prior exponere id adgreſſus fuerit, nobis licebit a controuerſia illa abſtinere. *Palaeobyblum* eſſe antiquiſſimam Phoenices ciuitatem, ſi iam demonſtrauerimus, reliqua ad nos non pertinere exiſtimamus. HESIODUS iam mentionem fecit *Bibli* ſeu potius Bybli. Ipſe enim de officio, diebus canicularibus praeſtando ſibi, ſic cecinit ac praecepit L. II. *Operum & Dierum* v. 586. ſqq.

Εἰη

(b) Apud EUSEBIUM *Prep. Evang.* L. I. c. 9.

(c) Loco laudato, L. I. II. Paris. 1735. 4.

(d) In libro: *Hiſtoire des Empirs & des Republiques depuis le deluge iusqu'à Jeſus Chriſt*, Hagae Com. 1735. 8. To. IV. p. 124. ſqq.

Αλλὰ τότ' ἤδη
Ἔιη πετραίη τε σκίη καὶ Βύβλινος ὄινος,
Μάζατ' ἀμολγαίη, γάλα τ' αἰγῶν σβεννυμενάων - -

Sed tunc iam ſit & petroſa umbra &, Byblinum vinum, & libum lacteum, & lac caprarum, quarum lac exſtinguitur. Vrbs Byblus, inter Berytum & Botryn, prope mare fuit ſita, exſtructa in excelſo loco (e). Palaeobyblum Strabo & Plinius a Byblo magis in auſtrum verſus collocarunt. Nec ipſa tam vicina fuit mari quam Byblos (f). DIONYSIUS *Periegetes* v. 912 memorat *vicinam mari Byblon & florentem Sidona.*

Βύβλον τ' ἀγχίαλον, καὶ Σιδόνα ἀνθεμόεσθαν.

Scholiaſtes autem haec addidit, (g) nempe Euſtathius: Ἡ Βύβλος κτίσμα καὶ αὐτὴ Κρόνου, Ἀδώνιδος ἱερὰ, Κινύρου βασίλειον ἀρχαιότατον, ἀπὸ Βύβλου τινὸς στρατηγοῦ ἢ ἀπὸ Βύβλου γυναικὸς οὕτω κληθεῖσα — — — *Byblus. condita eſt quoque ipſa a Saturno, Adonidi ſacra, Cinyrae regia antiquiſſima, a Byblo milite quodam ſeu a Byblo muliere ſic denominata* — — — Adiungit deinde alias porro originationes, quas credo ſingulas eſſe effictas, ac eapropter haud repetendas. Ecquis credet, Salmanaſſarem Aſſyriorum Regem, cui in Babyloniam nihil iuris erat, in Samariam (h) transtuliſſe homines, in Babylonia ad extremas

(e) STRABO C. XVI. p. 755.

(f) CELLARIUS *Geogr. antiqu.* L. III. c. 12. p. 448.

(g) In IO. ALB. FABRICII *Bibliotheca latina* L. III. c. 11. p. 602. edit. Hamburgi 1721. 8.

(h) ESRA IV, 10.

tremas Euphratis partes ſolitos commorari ? Socii eorum, qui ex Babel in colonias nouas deducebantur, Syriam incoluerunt, intra Orontem flumen ac mare Aegeum concluſam. Cur hiſce fuerint adiuncti Babylonis Euphratenae incolae, quam tum exſtitiſſe perquam eſt dubium, ni falſum, rationem certe adparere nullam exiſtimo. Quantum vero inter voces בבל *Babel* & *Byblos* interſit, nemini eſt obſcurum.

§. IX.

Subit autem animum admiratio, qui plerumque Euphrates exiſtimetur limes Cananaeae borealis, quum vltra Orontem & Amathen ac Abidam promiſſio, Judaeis quondam nunciata, nihil continuerit. Euphratis in ſacris litteris vocatur כְּבָר *Chebar* Ez. I, 1, 3, X, 15. hoc eſt, *validus*, *fortis*, *magnus*. Arabes *maximum* vocant *Acbar* اكبر, quae ipſa vox in *Euphraten* tranſiit, flumen quippe maximum ac validiſſimum. Orontes vero, Syriae fluvius validiſſimus, vocatur in codice Sacro & *Phrat* פְּרָת & *Tiphſach* (i), quae vox in Periplo Scylacis legitur, nempe *Thapſacus*. *Phrat* dicitur ita nomenque ſuum trahit ex פרה *findendo* & *ſcindendo*, eum quidem in modum, *ut fructus fetusque in lucem proferatur*. Ipſe enim diuidit Syriam ac inter iuga montium vtrimque porrecta vallem efficit frugiferam & amoenam. Fra. Ferd. de TROILO (k) de initio Orontis id facit planum & teſtatum, diſſe-

---

(i) 1. Reg. IV, 24.

(k) In *Orientaliſcher Reiſebeſchreibung* Lips. & Francofur. 1717. 8. p. 70. 72.

diſſerens ita: *Balbeck iacet in valle — — heic in vicinia oriuntur flumina Orontes & Eleutherus.* De ſolo iuxta Orontem fecundo & fertili Dionyſius Alexandrinus Periegetes v. 918. ſqq. ita ſcripſit:

Αὐτὰρ ἐνὶ μέσσῃσιν Ἀπαμείης πτολίεθρον.
Τῆς δὲ πρὸς ἀντολίην κατασύρεται ὑγρὸς Ὀρόντης
Ἄσπετος, Ἀντιόχοιο μέσην διὰ γαῖαν ὁρίζων.
Πᾶσα δέ τοι λιπαρή τε καὶ εὔβοτος ἔπλετο χώρη
Μῆλά τε φερβέμεναι καὶ δένδρεσι καρπὸν ἀέξειν.

Porro in mediis terrae illius partibus exſtat oppidulum Apomeae.
Ad Orientem vero, ratione ad illam habita, humidus Orontes protenditur
Ingens, interfluens mediam Antiochi terram, iſt eſt, mediam Antiochiam.
Omnis vero regio eſt pinguis & paſcuis abundans,
Apta ad oves nutriendas & paſcendas, fructumque arboribus
Conciliandum ac accumulandum.

De Oronte STRABO diſſerit, ad Daphnem, Antiochiae vicinam vrbem cogitationes ſuas conferens, hunc in modum (l): *Prope vrbem Orontes labitur, qui in Coele Syria ortus, poſtea, ſub terram demerſus, iterum emergit: & per Apamienſem agrum & ad Antiochiam procedens, in mare Seleuciae proximum exit. Is quum prius Typhon diceretur, mutato nomine, ab illo, qui in eo*

(l) L. XVI. p. 750. ſq.

eo pontem fecit, Orontes eſt appellatus. Huic loco Typhonis fulmine icti fabulam adfingunt. FOURMONTIUS (m) quidem per Typhonem intelligi putat Seſoſin, Sethoſin, ſeu Seſoſtrin, eo quod Aegyptii Typhonem vocarunt *Seth* (n); nec ipſe erubescit, per *filios Seth*, Num. XXIV, 17. commemoratos, intelligere & denotare *Sethroïtas*, ſeu incolas vrbis Aegyptiacae in Delta ſitae *Sethron*. *Sethron* enim & *Seth* ipſi eſt vna eademque ciuitas. Addit, Typhonem, Aegyptiis ſic vocatum, eſſe *Seth*, ac *Sethron* exſtitiſſe ſecundum veteres *vrbem Typhonis* (o). Alii de Typhone ſecus ſtatuunt. Quare Typhonem iam omittimus, cuius rem & perſonam nec ipſe EUSTATHIUS, ad Orontem illuſtrandum commentatus, (p) detegere fuit conatus. Cel. quidem DAUIDES MILLIUS (q) per fluvium *Phrat*, deſignatum fuiſſe Euphraten, cum turba ſtatuit. Sumit vero magis quam oſtendit, deſtinaſſe & promiſiſſe Deum Abrahamo & Israëlitis regiones Nilum inter & Euphraten concluſas, ſed eas nec adſignaſſe nec tradidiſſe ipſis. Ecquis credet, obſecro, Deum poenitere promiſſionum ſuarum? quis, eum migrare & fallere fidem, exiſtimabit? Terrae populorum illorum, quorum in

(m) *Reflexions critiques ſur les Hiſtores des Anciens Peuples* L. III. c. 9. p. 158.

(n) *Plutarchus de Iſide & Oſiride* p. 351.

(o) *Marshami can. Chron.* ſaec. VIII. p. 107.

(p) In *Commentario ad Dioniſium Periegeten.* p. 118.

(q) In *Diſſertationum ſelectarum* prima *de Nilo & Euphrate terrae Sanctae terminis.* Ipſae Diſſertationes prodierunt a. 1724. 8. Traiecti ad Rhenum.

in poſſeſſiones Deus poſteros Abrahami erat immiſſurus, intra Orontem & montes Seir lacumque Sirbonidem ſitae fuerunt. *Chivvaei* Libanum ac Antilibanum accolebant, ac reliquorum ad ſemtemtriones erant poſtremi. *Philiſtaei* ab emerſu lacus Sirbonidis habitabant littoris oram ad Joppen vsque. *Cananaei* ad mare magnum & Jordanem ſedes habebant. *Amoraei* ad Hesbonem domicilia poſuerant, Moſis aeuo, ac Moabitas ex locis finitimis deturbauerant. Domicilia ipſi olim ad occidentalem maris mortui oram tenuerant ſua. *Jebuſaei* circa Hieroſolyma agebant. *Chittaeis* parebat regio, Betheli & Sichemitidi adiecta. *Pheriſſaei* inde a monte Garizim ad Iesraëlem ſeu Stradelam vsque habitabant. *Rephaim* Adraa & Aſtrarot Carnaim in Batanaea obtinuerant. *Avvaei*, (r) quos Plinius (s) vocauit *Auteos*, loca tenuerunt inter Caſium montem & ſinum maris Arabici. Nec eſt quod *Kenitas*, *Keniſſitas*, *Kadmonaeos*, & *Girgaſaeos* (t) circa Euphratem inueſtigemus, quos aeuo Moſis ab aliis vicinis populis fuiſſe iam ſubactos, ex Deut. xx, 17. perſpicitur, vbi gentes ab Israëlitis delendae ſex tantum in codicibus habraeis numerantur, videlicet *Chittaei*, *Emoraei*, *Cananaei*, *Perizzaei*, *Chivvaei*, & *Jebuſaei*. Girgaſchaeos intra mare magnum & Jordanem vixiſſe, facile intelligitur ex Jos. xxiv,

(r) Jos. XIII. 3. Ad Gazam habitabant ævo Joſuae.

(s) H. N. L. VI. c. 29.

(t) Gen. XV, 19. 21.

xxiv, 11. Kenitae ſeu Kinaei in regione Palaeſtinae auſtrali conſederant. Ibi exſtitit vrbs *Kinab* Jo. xv, 22. & *Cain* v. 57, quam Cel. Fourmont (u) a Caino Adami filio factam & habitatam fuiſſe refert, vel potius ſuspicatur. Kenitae, ipſorumque vrbs Kain, haud procul ab Amalekitis & Idumaeis fuerunt disiuncti, vt ex vaticinio Bileami liquet. *Num.* xxiv, 21, 22. Ipſos Kenitas inter Amalekitas in illorum confiniis egiſſe, ſatis ex eo intelligitur, quod Saulus Rex, Amalekitis internecionem illaturus, Kenitas iuſſerit ab eis ſecedere, ne forte Kenitæ ſimul a militibus praedae intentis acciperent detrimentum 1. Sam. xv, 6. Miror inter haec admodum, cur vir beatus HADRIANUS RELANDUS (x) de ſede & domicilio Kenitarum ibi nihil adtulerit, vbi de illis disſerere ac ſedem eorum determinare aggreſſus fuerat. Quibus in locis Kadmonaei & Keniſſaei fuerint commorati, non conſtat, quare, ſedes eorum Euphrati exſtitiſſe finitimas, nemo argumentis idoneis cuiquam perſuadebit. Si coniecturis liceat niti, *Kenath* vrbs tranſiordanica, ſita juxta Boſtrorum (y) ciuitatem in Menaſſitide vlteriori Num. xxxii, 42. domicilium praebuit Keniſſaeis, ſiquidem Syri ſolent litteram s in d vel t mutare. *Kadmonaei* videntur a tractu, quem tenuerunt ad orientem, eſſe adpellati, quae interpretis

(u) Loco citato L. II. p. 22.

(x) *Palaeſtinae* L. I. c. 27. p. 140. ſq.

(y) *Euſebius* in *Onomaſtico*.

tis chaldaici Hieroſolymitani eſt opinio. Sed ita haeremus in idea relatiua, & Kadmonaei ita dicuntur, reſpectu ad reliquas gentes recenſitas habito, tantum abeſt, vt ipſi ad Euphratem ſint locandi. Quis vero credet, Deum Abrahamo eiusque poſteris promiſiſſe eos populos, easque regiones, in quibus commemorandis nihil impenſum fuit operae? Dauides & Salomo eas perdomuerunt gentes, quas Joſua deuincendas ſignificauit. Sed ipſi nec Damascum nec Chalybonitida, multo minus terras ad Euphraten poſitas, ditioni ſuae adiecerunt, non transgreſſi Orontem. Ecquid inconcinnius dici potuiſſet, quam illud, Euphratem eſſe terrae promiſſae limitem? Euphrates enim eam non terminat, nec limitis ſeptemtrionalis officio fungi poteſt. Si Euphrates eſſet pro termino boreali habendus, gentes & vrbes, Euphraten inter & mare magnum interiacentes, vt finis certus figeretur, debuiſſent commemorari & deſignari. Sed de hac determinatione altum in veteris teſtamenti tabulis adeſt ſilentium. Orontes e contrario ad limitem denotandum eſt habilis, Syriae fluvius maximus, qui a borea concludit & terminat omnes terras & gentes, quae erant a Judaeis & deuincendae & expugnandae. Quam ob cauſſam facile eſt intellectu, fluvium terrae promiſſae ſeptemtrionalem eſſe Orontem, eumque in ſacris litteris ſenſu praecipuo dici הַנָּהָר *fluvium illum*, *flumen illud magnum*, immo *Phrat*. Quousque patuerit regnum & poteſtas Salomonis, perſpicitur ex

O o o 1 Reg.

1Reg. V, 1. vbi Salomo dicitur *imperaſſe omnibus regnis inde a fluvio illo vsque ad terram Philiſtaeorum & vsque ad terminum Aegypti.* Limitem heic habes terrae, in longitudinem verſus ſeptemtriones & notum patentis, extenſaeque iuxta mare magnum. De Mizpah legitur Neh. III, 7 aliquid, quod non videtur negligendum. Ipſa enim dicitur לְכִסֵּא פַּחַת עֵבֶר הַנָּהָר fuiſſe *inſtar ſolii ſedisque Ducis citra fluvium illum.* Nehemiae liber citra Orontem in Palaeſtina fuit conſcriptus. *Mizpah* indubie indicatur vel Gileaditica vel ea, quae monti Chermoni adiacebat. Quis eam indicaret, adiecta mentione disiunctisſimi Euphratis? Recordor porro vrbis כַּרְכְּמִישׁ ad *Phrath* poſitae, quam Pharao Nechus iuit expugnatum 2 *Chron.* xxxv, 20. Quis non illico meminit, vrbem dici כַּרְךְ *Krac*, *Karah*, *Kerech*, & *Emeſam* eſſe *Miſch*? Idem diſtinctius dilucet ex hiſtoria Dauidis, qui depugnauit aduerſus Ammonitas ac auxilia eorum, Damaſco, Maëcha, & Zoba, in partes ipſorum excita. Haec ipſa exire fecerat Chanon Rex Ammonitarum מֵעֵבֶר הַנָּהָר ex *regione, citra fluvium illum*, Phrat alias dictum, *ſita* 1 *Chron.* xix, 16. Syriae ſeu Aramaeae caput tum erat Damaſcus, cuius ſitus ſatis eſt cognitus. *Maacha* erat ſedes regis, qui Aramaeae Maachatenae praeſidebat. Zobam eſſe Abilam Libaneſiam, Calmetus aliique viri praeſtantiſſimi docuerunt. Vrbs *Cun* regis Zobae (z) indubie exſtitit *Conna*,

(z) 1 Chron. XVIII, 8.

Conna, haud procul inde verſus ſeptemtriones remota. Zoba fuit Amathæis finitima 1 Chron. XVIII, 3. Chivvaei autem montem Libanon (Antilibanum) incoluerunt inde a *Baal Chermon vsque ad initia regionis Amathes* Jud. III, 3. Quis vero ignorat ſitum montis Hermonem & ſedes Chivvaeorum ? Quo ipſo rurſus teſtimonio ſitus vrbis ac terrae Amathes illuſtratur & extra dubitationem ponitur. Jeroboamus ſecundus, Rex Judaicae gentis in Iſraëlitidis regno, *Damaſcum & Amathen* recuperauit, reſtituens terminos limitemque terrae Iſraëliticae inde a faucibus Amathes vsque ad mare planitiei adiectum (a). Ni fallor admodum, *planities illa* הָעֲרָבָה eſt vallis inter Libanum & Antilibanum, Caſium inter & Anticaſium, quae iuxta Poſidium ſeu Poſidonium terminatur mari Aegeo ſeu Magno. *Mare* enim *regionis campeſtris* non aliud eſſe poteſt, ac illud, quod planitiem illam commemorabilem & famoſiſſimam adluit ac finit. Quod ipſum porro nos plenius de Oronte, qui vallem illam perfluit ac ſtringit, tanquam terrae promiſſae termino, conuincit. Suſpicor praeterea, Orontem non ſolum in ſacris litteris adpellari *Nahar* fluuium eximium, ſed etiam apud Plinium ita dici. Apud ipſum quidem ita legitur L. V. c. 20. *In ora etiamnum ſubiecta Libano fluuius Magoras.* Si legeris: *fluuius Naboras* (הנהר), tum omnia ſunt in expedito. Paullo poſt leguntur haecce: *Regio, in qua ſupradicti*

 deſinunt

(a) 2 Reg. XIV, 25. 28.

deſinunt montes, & interiacentibus campis, Bargylus mons incipit. Sed res ipſa flagitat, vt ita legamus: *In regione, qua ſupradicti deſinunt montes, & interiacentibus campis, Marſyas mons incipit.* Emendatio haec ei adridebit, qui contulerit Strabonem, ex quo ſua hoc loco Plinius hauſit. In capite XXIII legimus ita: *Coele* (Syria) *habet Apamiam, Marſya amne diuiſam a Naberinorum tetrarchia.* Sed legendum eſt: *Marſya monte diuiſam a Naberinorum tetrarchia.* Naherini, Orontis accolae heic intelligi commode ſatis poſſunt. *Aram nabaraim*, vulgo Meſopotamia, regio eſt Orontem inter & Jordanem poſita, quae alias vocatur *Arampaddan* ſeu *Aramaea batanaea.* In ea locus ſedesque Labani, *Haran*, חָרָן; eminuit. Ex Harane Labanus tertio die, poſtquam Jacobus clanculum cum ouium grege & familia ſua diſceſſerat, iter ingreſſus, ſeptem poſt diebus Jacobum generum in Gileaditide deprehendit (b), eiusque monte, *Gilead* dicto, prope *Mizpe* & *Machanaim* & flumen Jaboc (c), haud procul a fluuio Jordane (d). Quis, quaeſo, exiſtimabit fieri poſſe, ut viator ſex diebus a Carris, ad Chaboram vltra Euphraten poſitis, peruenire poſſit ad ripam Jaboci ſeptemtrionalem? Vides itaque, lector, regionem, quae nunc *Arampaddan* nunc *Aram Nabaraim*, dicitur, atque Nahoris & Labani exſtitit

(b) Gen. XXXI, 22, 23.

(c) c. XXXII, 2, 22.

(d) c. XXXII, 10.

tit (e) patria, nequaquam Euphrati eſſe adiiciendam, licet ita plerumque ſimus edocti & ad ſentiendum inſtituti.

§. X.

Heliopolis ſeu *Balbec* eſt antiqua illa vrbs Amathe, quae regioni circumiectae nomen dedit. Nomen graecum ex *Solis*, ἡλίȣ, nomine fuit deductum. Vallis adiecta obtinuit a Solis cultu, qui Heliopoli floruit, nomen בִּקְעַת אָוֶן, hoc eſt, *vallis* ac *planities Solis*. Arabes nomen illud, quantum ad partem adtinet priorem, retinuerunt, vocantes vallem illam *Al – bkaa*. Deus tutelaris, ſeu Baal, Phoenicum erat Sol, lucis per terram moderator. Vnde facile adparet, vocem *Balbec* denotare *vallem Solis*. Amathaei & Amathe, חֲמָת חֲמָתִי, nomen traxerunt ex חַם *calido* & חַמָּה *Sole* ſeu *calore*. (s) Cives Amathaei, in Samariam delati, Deum ſuum ſeu religionis ſuae ſtatumen vocarunt *Aſima* אֲשִׁימָא 2. Reg. XVII, 30. JOANNES SELDENUS (t) ignorantiam ſuam heic profitetur, nec audet Numen hoc commentitium deſignare. Cel. FOURMONTIUS nil certi determinat. Judaei, odia ſpirantes in extraneam Amathaeorum gentem, vocem incognitam per *hircum* exponunt. Sed, indicari ſolem, eſt admodum probabile. Sol enim vrbi dederat nomen, ſolisque in ea

 cultus

(e) Gen. XXVIII, 2, 6.

(f) Job. XXX, 28. Pſ. XVII, 7.

(g) De *Diis Syris* Synt. II. c. IX.

cultus ab antiquiſſima inde viguit aetate. Originatio vocis *Aſima* fauet huic opinioni. Arabes enim ea voce *altum quoduis* denotare ſolent. Quae denominatio in ſolem omnino quadrat, quippe, reſpectu ad nos habito, & eminentem & excelſum.

§. XI.

Amathen eſſe Heliopolin, exinde etiam dilucet, quod Amathe fuerit terminus Cananaeae ſeptemtrionalis (§. 1. 9.) in valle ſolis ſita (§. 3.), Zobae ſeu Abilae vicina (§. 2.) & finitima Damaſco (§. 4.), ad auſtrum amnis Eleutheri poſita (§. 5.) Syriaeque Coeles vrbibus adnumerata (§. 6. 8.) & a ſole dicta (§. 10.)

§. XII.

Chaldaeus interpres ad Num. XIII, 22. *Chamath* reddidit *Antiochiam*, אנטוכיא. (*) CYRILLVS Comm. in Amos VI, 2. p. 312. *Φασὶ δὲ, τὴν μὲν Ἀιμὰθ πλατεῖαν ταύτην εἶναι τὴν νῦν Ἀντιόχειαν, τὴν δὲ μείω τὴν στενοτέραν, τὴν γείτονά τε καὶ ὅμορον, Ἐπιφάνειαν, Ἀντιόχου τοῦ ἐπίκλην Ἐπιφανοῦς τὴν μὲν Ἀντιόχειαν, ἐπιφάνειαν δὲ τὴν ἑτέραν, εἰς δόξαν ἰδίαν ὠνομακότος. Ferunt, Aemath maiorem eſſe Antiochiam; minorem & anguſtiorem, ei vicinum & conterminam, Epiphaniam: Antiochus autem Epiphanes illam*

(*) Rabbi Salomo ad Amos VI, 2. *Hamath eſt Antiochia.* Hieroſolymitanus Targumiſta ad Gen. X, 18 vocem *Hamathi* interpretatur per *Antiochenum.*

illam quidem Antiochiam, hanc Epiphaniam, ad gloriam ſuam denominauit. HIERONYMUS ad hunc Amoſi locum conſimilia protulit, tradens, *Chamath magnam eſſe Antiochiam, alteram vero Chamath Epiphaniam, vnde vsque hodie pergentibus Meſopotamiam prima manſio vocatur Emmas.* Sed Amathe haud exſtitit gemina. Dicta autem illa fuit ab Amoſo *magna* רַבָּה, propterea quod ipſa exſtiterat ante Salmanaſſarem & Sennacheribum vrbs ſatis magna, glorioſa, illuſtris, diues, potens & ſpatioſa. Quo minus vero credamus, Amathen & Antiochiam exſtitiſſe vrbem, impedimur & retardamur ratione haud vna. Antiochia enim non exſtitit monti *Chermon* vicina (§. 9.), nimium abfuit a Damasco (§. 4.) & Zoba ſeu Abila Libaneſia (§. 2.), nec non ab auſtrali parte fluminis Eleutheri (§. 5), a quo ad ſeptemtriones admodum diſtat. Amathe interiacuit Hermonem inter & fluvium *Phrat* ſeu *Orontem* (§. 9), 1. Par. XVIII, 3. Qui ſitus nulla ratione congruit vrbi Antiochiae.

§. XII.

Amathen, nude ita & ſimpliciter adpellatam, eſſe Epiphaniam, credidit Cyrillus, & Hieronymus ei prolufit. HIERONYMUS idem (u): *Ego autem inveſtigans repperi, Emath vrbem Coeles Syriae adpellari, quae nunc graeco ſermone Epipha-*

(u) De *Locis Hebraicis* fol. 124. col. 1. To. III. Opp. edit. Froben.

Epiphania dicitur. Ipſe vero ſibi haud ſatis conſtat. Nam paullo poſt, velut ſui oblitus, haec tradit (x): *Emath terminus allophylorum in regione Damaſci.* Quis, obſecro, credet, Epiphaniam in regione Damaſci deprehendi poſſe? Si interualla Itinerarii, Antonino adtributi, alicuius penſi habuerimus, diſtare admodum Epiphaniam a Damaſco perſpiciemus. En interualla, milliaribus Romanis ſupputata: *Chalcis* XX, *Arra* XX, *Cappareae* XVI, *Epiphania* XVI, *Arethuſa* XVI, *Emeſa* XVIII, *Laodicea ad Libanum* XXXII, *Conna* XXXII, *Heliopolis* XXXVIII, *Abila* XVIII, *Damaſcus.* Notamus obiter, Libanum heic dici, qui erat Antilibanus, & Heliopolin fuiſſe Damaſco finitimam. Nihilo minus AQUILAS *Emathen* tranſtulit in ſua interpretatione per *Epiphaniam Syriae*, teſtibus Theodoreto (y) & Procopio Gazaeo (z). Sed nec Aquilas ſibi conſtitit, quippe qui in Jer. XLVI, 2. Theodoreto teſte, *Emath vocauit Emeſam.* Addidit Theodoretus: Ἔςι δὲ καὶ ἄλλη Ἐμάϑ, ἡ νῦν Ἐπιφάνεια, *eſt & alia Emath, nunc dicta Epiphania.* Alibi ita diſſerit (a): *Emath magna eſt Emeſa, alia autem Emath Epiphania. Sic enim vsque in hunc diem patrio ſermone adpellatur.* HIERONYMUS ad Amos VI, 2. paullo aliter ſentit de Amathe magna, ſic commemorans: *Pergite in Hemath*

(x) Ibidem fol. 127. Col. 2.

(y) *Quaeſt. XII. in 2 lib. Regum.*

(z) *In Comm. ad II. lib. Regum.*

(a) *In Comment. ad Jerem. 4.*

Hemath magnam, quae nunc Antiochia nominatur. Magnam autem vocat ad diſtinctionem minoris Hemath, quae adpellatur Epiphania. SAMUEL BOCHARTUS (b) iudicium ſuum ita interpoſuit: *Utut Judaeorum fines longe infra Antiochiam ſubſtitiſſe concedamus; tamen ab Epiphania, quae & ipſa vocatur Hamath, non erant valde diſſiti.* CHRISTOPHORUS CELLARIUS (c) & HADRIANUS RELANDUS, (d) ſummi quondam viri, facile perſpexerunt, Epiphaniam in ſeptemtriones nimis recedere. Nam formula loquendi, *qua itur verſus* (e), adhibetur de locis admodum finitimis & propinquis. Commentator Judaeus, KIMCHI (f), recte monuit, Hamathen fuiſſe quidem locum vnum ex terminis terrae Israëlis, ita tamen, vt extra limites eius fuerit poſitus. JOSEPHUS, (g) ſcriptor Judaicus, Amathen Hermoni propiorem ſtatuit, quam Patres eccleſiae ſtatuerunt. Ipſe enim tradit, exploratores, qui Cananaeam ab auſtro ſeptemtrionem verſus peragrarunt, *veniſſe ad vrbem Amathen & Libanum montem* ἐπί τε Ἀμαθὴν πόλιν καὶ Λίβανον τὸ ὄρος. Saepius iam monuimus, Antilibanum vocari vulgo Libanum. Accedit, quod itinerum ſcriptores, Heliopolin verſus occaſum adiacere Antili-

Ppp bano,

(b) *Geogr. Sacrae* L. IV. c. 36.

(c) *Geographiae antiquae* L. III. c. 12. p. 462. ſq.

(d) *Palaeſtinae* L. I. c. 25. p. 121.

(e) 1 *Reg*. XVIII, 46. Gen. X, 19.

(f) Ad *Zach*. IX, 2.

(g) *Antiqq. Jud.* L. III. c. 13.

bano, commemorant. EBN-WERDI, ſcriptor Arabs, (h) refert, Heliopolin ſeu Balbec exſtructam eſſe in monte intra terram ſatis ſpatioſam & diffuſam, quae partem eius teneat ſuperiorem: exiſtere ibi fontes multos, & in montis radicibus amnem, qui complura agitet molendina. Addemus, vt eadem confirmemus & illuſtremus, verba. (i) Domini de la Roque, teſtis oculati: *La ville de Balbec eſt ſituée dans la Syrie du Liban au bout d'une longue plaine, qui eſt presque toute environnée de hautes montagnes. La plaine a ſon étendue du côte de Damas, & elle eſt encore ſeparée du territoire de cette derniere Ville par d'autres montagnes, qui ſont vne ſuite du Liban ou de l'Anti-Liban. Enfin Balbec n'eſt éloigné que de quinze ou ſeize lieuës Françoiſes de Damas, qui eſt presque à ſon Orient. Les Villes maritimes de Gebail & Baruth en ſont à dix-huit ou vingt lieuës de diſtance du côté du Couchant. Elle voit d'aſſez près les plus hautes montagnes du Liban vers le Nord, & vne partie de l'Anti-Liban lui eſt opposée du côté du Mydi.* Venerunt itaque exploratores primo ad Amathen, ac deinde ad Libanum proprie dictum. Amos magnitudinem & potentiam Amathes, ſua aetaae iam labefactatam, haud temere praedicauit. Pergit enim Dominus *de la ROQUE: Cette ville eſt fermée de belles murailles de pierres taillées, dont le*

(h) Tom. II. *des Memoires de litterature tirez des regiſtres de l'Academie Royale des Inſcriptions & belles lettres* p. 508. ſqq.

(i) *Voyage de Syrie & du Mont Liban* To. I. Amſterdam 1723. 8. p. 97. ſq.

le circuit eſt d'environ une lieuë d'une heure de chemin, & contient les plus beaux reſtes d'antiquité, qui ſoient peut-être aujourd'huy dans l'Orient, ſans en excepter même les ruines, qui ſont en Egypte. Vix quidem videtur neceſſarium, vt oſtendamus, Epiphaniam haud exſtitiſſe Amathen. Ne tamen gradu incerto & fluctuanti inceſſiſſe videamur, argumenta, quibus id effici poſſe exiſtimamus, ſubiungemus. Primo quidem Epiphania Libano non eſt finitima, nec Hermonis in limitibus ſita: Deinde a Damasco ipſa nimio diſtat interuallo: adiacet Oronti, tantum abeſt, vt eam inter & Hermonem ſit poſita: tum etiam ad auſtrum Eleutheri amnis quaeri non poteſt, nec ibi locari debet: tandem vero a loco Rechob, in terminis tribus Aser ſito, immane quantum discrepat, tantum abeſt, vt inde proximo adiri poſſit interuallo. Nemo itaque a Joſepho, qui ſecum in hac cauſſa diſſentit, ſeſe occupari vel in transuerſum agi patietur, qui (k), Amathen ſua adhuc aetate ita ab indigenis adpellari, tradit, a Macedonibus vero *Epiphaniam.*

§. XIII.

Emeſam nonnulli in loco *Amathe* latere, ſibi perſuaſerunt. Quid ſenſcrit Theodoretus, admodum tamen incertus, paullo iam ante (§. 12.) intelleximus. Noſtra aetate locus ab accolis Turcisque vocatur *Hamſa.* Chriſtophorus Cella-

(k) *Ant.* I. 7.

Cellarius (l) eum ad occaſum adplicuit Oronti. Sed vrbs illa nec Oronti eſt admodum vicina, nec ad occidentalem eius ripam locanda, ſi Dominum *de la ROQUE* (m) conſuluimus, eique habemus fidem. Quantopere verſus boream reclinet ſitus Emeſae, ex Itinerario Antonini patescit, cuius ſupra (§. 4.) partem ſuppeditauimus. Mappula geographica id ipſum declarabit diſtinctiori rationc, cum in finem a Cl. Matthaeo Seuttero proxime edenda. Videntur vtique *Amathe*, חמת, & *Emeſa*, ſi ſonum reſpicias, ſatis conuenire atque conſonare. Verum quod caput eſt cauſſae, argumenta deſunt reliqua, quibus illa conformitas poſſit ſtabiliri. Recurrunt enim ac redeunt in memoriam impedimenta ſingula, quae in cauſſa exſtiterunt, cur Epiphania haud eadem ſit ac Amathe (§. 12.)

§. XIV.

Vſum fortaſſis requiris, lector, qui ex hac commentatione ſit exſpectandus. Vtilitatem itaque huic tractationi non mediocrem ineſſe, ita oſtendam. Primum quidem, nullam vocem ſacrarum litterarum adtentione eſſe indignam, nemo non fatetur. Ecquis enim, propoſitionum lucem a luce notionis ac ideae, quae ſingulis cum verbis vocibusque eſt coniungenda, pendere, dubitabit? Praeterea iuuat ſcire terminos, quibus terra ſancta concluſa fuit. Intellexi ſaepius, quantopere petulantes verbi diuini contemtores, Tolando

(l) In Tabula, quae *Syriam* antiquam repraeſentat.

(m) Loco laudato p. 135.

do haud diſſimiles, promiſſa Dei, Judaeis impertita, eludere ac reprehendere haud erubuerint, rati, Deum plura promiſiſſe, quam præſtitiſſe, ſiquidem ipſe Abrahamo pollicitus fuerit terram & Nilo & Euphrate terminatam, quam Judaeis tamen haud vnquam tradiderit. Aliis videtur illa terminorum deſignatio ridicula, qua regioni, inter mare magnum & Ammonitidem interceptae, totus Euphrates citra vllam locorum ei adiacentium ſingularem commemorationem pro limite ſeptemtrionali adſignatur. Eſt, qui id nequaquam fieri potuiſſe contendit, vt Labanus intra ſeptiduum ab vrbe *Carris*, Meſopotamiae ad Chaboram fluvium loco, ad Jordanis & Jaboci confinia & ad vrbem Machanaim potuerit pervenire. Nequis vero exiſtimet, vrbem Palmyram a Salomone fuiſſe conditam ac *Thadmor* dictam, ideo & hanc opinionem refellere conſtitui. Objecit mihi olim nonnemo, promiſſiones Dei ſacro codice comprehenſas eſſe ſaepius vagas, vltra modum amplificatas, & inexplicabiles, & vt id demonſtraret, de terminis terrae promiſſae ſeptemtrionalibus ac incerto Amathes ſitu iniecit mentionem. Hiſce me ludibriis ingeniorum & obiectionibus feciſſe ſatis, arbitror.

Ad hunc ſcopum reſpexi, & hic eſt ille vſus,
quem ob oculos habui conſtitutum.